目 录

第 1 章

局 部 凸 空 间

1. 记号和术语

设 $\mathbb{R}^n$ 是 n 维欧氏空间，又设 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的变元，它的范数记为

$$|x|=\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}.$$

设 $\mathbb{N}^n$ 是由所有 $p=(p_1, \cdots, p_n)$ 组成的集，其中 $p_j\in\mathbb{N}$, $1\leqslant j\leqslant n$, $\mathbb{N}$ 表示非负整数集. 对所有 $p\in\mathbb{N}^n$, 我们记 $|p|=p_1+\cdots+p_n$. 若 $p, q\in\mathbb{N}^n$, 定义 $p+q=(p_1+q_1, \cdots, p_n+q_n)$. 记号 $p\leqslant q$ 意味着 $p_j\leqslant q_j$, $1\leqslant j\leqslant n$. 我们设

$$p!=p_1!\cdots p_n!,$$

以及 $$\binom{p}{q}=\frac{p!}{q!(p-q)!}=\binom{p_1}{q_1}\binom{p_2}{q_2}\cdots\binom{p_n}{q_n}.$$

若 $x\in\mathbb{R}^n$, $p\in\mathbb{N}^n$, 则 x^p 表示 $x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}$. 按照这一表示，$n$ 个变元$(x_1, \cdots, x_n)$的次数 $\leqslant m$ 的多项式可写为

$$P(x)=\sum_{|p|\leqslant m} a_p x^p,$$

其系数 a_p 可以是复数，在这种情形下称 P 是常系数多项式，a_p 也可以是复值函数，这时就称 P 是变系数多项式.

把偏导数记为 $\partial_j=\partial/\partial x_j$, $1\leqslant j\leqslant n$, 并记

$$\partial=\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

同时设 $D_j=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $1\leqslant j\leqslant n$, 这里 $i=\sqrt{-1}$, 并记

$$D=(D_1, \cdots, D_n).$$

若 $p\in\mathbb{N}^n$，记号

$$\partial^p \text{ 或 } \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p$$

表示偏导数
$$\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}.$$

相仿地，我们设

$$D^p = D_1^{p_1}\cdots D_n^{p_n}.$$

根据这些记号，一个阶 $\leqslant m$ 的偏微分算子可写成

$$P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{|p|\le m} a_p(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p \quad \text{或} \quad P(x,\ \partial)=\sum_{|p|\le m} a_p(x)\partial^p,$$

其中 $a_p(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 内某个开集上的复值函数. 当系数 a_p 都是常数时，我们简单地记

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{|p|\le m} a_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p \quad \text{或} \quad P(\partial)=\sum_{|p|\le m} a_p\partial^p.$$

以后，当我们处理 Fourier 变换时，将考虑变元为 $D=(D_1, \cdots, D_n)$ 的偏微分算子

$$P(D)=\sum_{|p|\le m} a_p D^p$$

而不是 $\partial=(\partial_1,\ \cdots,\ \partial_n)$.

定义 1.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，m 是非负整数. 我们记 $C^m(\Omega)$ 是定义在 Ω 内的所有具有直到 m 阶连续导数的复值函数所组成的复数域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 记 $C^\infty(\Omega)$ 是定义在 Ω 内的所有具有任意阶导数的复值函数所组成的空间.

显然，
$$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m\geq 0} C^m(\Omega).$$

$C^\infty(\Omega)$ 的元素称为 Ω 上的*无限可微函数*或 C^∞ *函数*.

推广的 Leibniz 公式

设 $P=P(\partial)$ 是一个偏微分算子，令 u 和 v 是两个属于 C^∞ 的函数. 我们有下列非常有用的公式：

$$P(\partial)(uv)=\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u\cdot P^{(\alpha)}(\partial)v, \tag{1.1}$$

这里 $P^{(\alpha)}(\partial)$ 是偏微分算子，它是将多项式

$$P^{(\alpha)}(\eta)=\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{\alpha}P(\eta)$$

中的 η 换为 ∂ 而得到的. 事实上，由 Taylor 公式，我们有

$$P(\xi+\eta)=\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\xi^{\alpha}P^{(\alpha)}(\eta). \tag{1.2}$$

另一方面，利用 Leibniz 法则

$$\partial_j(uv)=\partial_j u\cdot v+u\cdot\partial v_j,$$

我们得

$$P(u\cdot v)=\sum_{\alpha}\partial^{\alpha}u\cdot R_{\alpha}(\partial)v, \tag{1.3}$$

这里 $R_{\alpha}(\partial)$ 是一个偏微分算子. 在 (1.3) 中令 $u=e^{\langle x,\xi\rangle}$ 和 $v=e^{\langle x,\eta\rangle}$，其中 $\langle x,\ \xi\rangle=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$，$\langle x,\ \eta\rangle=x_1\eta_1+\cdots+x_n\eta_n$，于是得

$$P(\xi+\eta)=\sum_{\alpha}\xi^{\alpha}R_{\alpha}(\eta). \tag{1.4}$$

比较 (1.2) 和 (1.4)，就得到

$$R_{\alpha}(\eta)=\frac{P^{(\alpha)}(\eta)}{\alpha!},$$

这就证明了 (1.1).

2. 检验函数；正则化

定义 1.2. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 内某个开子集 Ω 上的复值函数. 称集

$$\{x\in\Omega: f(x)\neq 0\}$$

在 Ω 内的闭包是 f 的支柱，并记它为 $\operatorname{supp} f$.

可见 f 的支柱是最小的相对闭集，在此集外 f 为 0.

在 Ω 内有紧支柱的 C^{∞} 函数，定义为 Ω 上的检验函数. Ω 上的所有检验函数所组成的向量空间记为 $C_c^{\infty}(\Omega)$ (或按照 Schwartz 的记号[28]，记为 $D(\Omega)$). 我们在第 2 章中将会看到，这一向量空间装备了适当的拓扑以后，在广义函数的定义中将具有非常重要的作用. 下列函数:

$$\beta(x)=\begin{cases}\exp(|x|^2-1)^{-1}, & 若\ |x|<1,\\ 0, & 若\ |x|\geqslant 1\end{cases}$$

是以单位闭球为支柱的 C^∞ 函数. 将它除以一个常数，此常数是 β 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分，我们得到另一个 C^∞ 函数，记为 α，它以单位闭球为支柱并且

$$\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(x)dx=1.$$

其次，对任何 $\varepsilon>0$，定义

$$\alpha_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

显然 $\alpha_\varepsilon(x)\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$，它的支柱是以原点为中心，以 ε 为半径的闭球 $\overline{B_\varepsilon(0)}$，并且

$$\int_{\mathbb{R}^n}\alpha_\varepsilon(x)dx=1.$$

借助于检验函数族 $(\alpha_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$，我们能够将不连续函数如可积函数，$L^p$ 函数等正则化，就是说，我们能证明这样的函数可用检验函数来逼近. 这就是下面的定理 1.1 的目的.

定义 1.3. 若定义在 Ω 内的函数 f 在 Ω 内的每一个紧子集 K 上可积(在 Lebesgue 意义下)，就称 f 是局部可积的.

f 在 Ω 内局部可积等价于对每一个紧集 $K\subset\Omega$，乘积 $f\cdot\chi_K$ 在 Ω 上可积，其中 χ_K 是 K 的特征函数，它在 K 上等于 1，在 K 外为 0.

定义 1.4. 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数. 称函数

$$u_\varepsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^n}u(x-y)\,\alpha_\varepsilon(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}u(y)\alpha_\varepsilon(x-y)dy \quad (1.5)$$

是 u 和 α_ε 的卷积，记为 $(u*\alpha_\varepsilon)(x)$ 或 $(\alpha_\varepsilon*u)(x)$.

定理 1.1. 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 内的局部可积函数. 则有

1. 卷积 u_ε 是 $\mathbb{R}^n$ 内的 C^∞ 函数.

2. 若 u 有紧支柱 K(以及 u 在 $\mathbb{R}^n$ 内可积的情形)，则 u_ε 的支柱含在 K 的 ε 邻域内.

3. 若 u 是连续函数，则 $u_\varepsilon\to u$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集上是一致的.

4. 若 $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$，$1\leqslant p<+\infty$，则在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 内 $u_\varepsilon\to u$.

证明 1. 为了证明 $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，只要注意到(1.5)中的两个积分都是在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集上计算的，并应用积分号内取微分的古典定理就可以了.

2. 按定义，K 的 ε 邻域是所有以 $x \in K$ 为中心，以 ε 为半径的开球之和

$$K_\varepsilon = \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x).$$

若 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及 $d(x, K) > \varepsilon$，则 $x \notin K_\varepsilon$，故对所有 $y \in K$ 有 $\alpha_\varepsilon(x-y) = 0$. 于是(1.5)的第二个积分等于0，这就意味着 u_ε 的支柱含在 K_ε 内.

3. 设 u 是连续函数，并令 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意固定的紧子集. 记

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(x-y) - u(x))\alpha_\varepsilon(y)dy.$$

因为 u 在 L 上一致连续，故对给定的 $\sigma > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对所有 $x \in L$ 和 $|y| < \delta$ 有

$$|u(x-y) - u(x)| < \sigma.$$

取 $\varepsilon \leqslant \delta$，我们得

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y) - u(x)| \alpha_\varepsilon(y)dy < \sigma$$

对所有 $y \in L$ 成立. 这就证明了当 $\varepsilon \to 0$ 时 $u_\varepsilon \to u$ 在 L 上是一致的.

4. 最后，设 $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$，$1 \leqslant p < +\infty$，已经知道在 L^p 内 u 能够被有紧支柱的连续函数逼近[27, p. 68]. 另一方面，若 $u \in L^p$，则由 Minkowski 不等式的积分形式[33]得

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy\right|^p dx\right)^{1/p} \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y)\alpha_\varepsilon(y)|^p dx\right\}^{1/p} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_\varepsilon(y) \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y)|^p dx\right\}^{1/p} dy = \|u\|_p. \qquad (1.6)\end{aligned}$$

于是 $u_\varepsilon \in L^p$. 给定 $\sigma > 0$，令 v 是有紧支柱的连续函数，使得

$$\|u-v\|_p<\frac{\sigma}{3}. \tag{1.7}$$

由不等式(1.6)和(1.7)，我们得

$$\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|_p\leqslant\|u-v\|_p<\frac{\sigma}{3}.$$

再写出

$$\|u_\varepsilon-u\|_p\leqslant\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|_p+\|v_\varepsilon-v\|_p+\|v-u\|_p. \tag{1.8}$$

因 v 是有紧支柱的连续函数，故由 3, $v_\varepsilon\to v$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致的，于是在 L^p 内 $v_\varepsilon\to v$. 如果我们选取 ε 充分小，使得

$$\|v_\varepsilon-v\|_p<\sigma/3,$$

则不等式 (1.8) 右端的每一项都小于 $\sigma/3$, 于是 $\|u_\varepsilon-u\|_p<\sigma$. 证毕.

定理 1.1 引导出下列定义.

定义 1.5. 称检验函数族 $(\alpha_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内函数的正则化族.

特别，若 $\varepsilon=(j)^{-1}$, 称函数序列

$$\alpha_j(x)=j^n\alpha(jx),\quad j=1,\ 2,\ \cdots,$$

是函数的正则化序列.

系 1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，则 $C_C^\infty(\Omega)$ 是 $L^p(\Omega)$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 内的稠密子空间.

系 2. 设 K 是含在 Ω 内的紧集，则存在函数 $\phi\in C_C^\infty(\Omega)$, 使得 $0\leqslant\phi\leqslant1$ 并且在 K 上 $\phi=1$.

证明 不失一般性，我们假设 Ω 有界. 设 δ 是 K 到 Ω 的边界的距离，$K_{\delta/3}$ 是 K 的 $\delta/3$ 邻域. 容易看出函数

$$\phi=\chi_{\delta/3}*\alpha_{\delta/3}$$

(这里 $\chi_{\delta/3}$ 表示 $K_{\delta/3}$ 的特征函数)，满足所要求的性质. 证毕.

通过相仿的证明可知，若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧子集，V 是 K 的任一邻域，则存在函数 $\phi\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得 $0\leqslant\phi\leqslant1$, ϕ 在 K 的一个邻域上为 1, 并且 $\operatorname{supp}\phi\subset V$.

系 3. 设 A 和 a 是两实数，$0<a<A$, 记 B_A 和 B_{A-a} 分别是两个半径为 A 和 $A-a$ 的同心球，则存在函数 $\phi\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得

(i) $\operatorname{supp}\phi\subset B_A$, (ii) 在 B_{A-a} 上 $\phi(x)=1$, (iii) 对所有 $p\in\mathbb{N}^n$, $|\partial^p\phi(x)|\leqslant C(p,n)\cdot a^{-|p|}$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$.

证明 设 χ 是半径为 $A-(2a/3)$ 的同心球的特征函数，定义

$$\phi(x)=\chi*\alpha_\delta(x)=\int_{B_{A-(2a/3)}}\alpha_\delta(x-y)dy=\frac{1}{\delta^n}\int_{B_{A-(2a/3)}}\alpha\left(\frac{x-y}{\delta}\right)dy,$$

其中 $\delta=a/3$. 显然 $\operatorname{supp}\phi\subset B_A$, 并且在 B_{A-a} 上 $\phi=1$. 对所有 $1\leqslant j\leqslant n$, 我们有

$$\partial_j\phi(x)=\frac{\delta^{-1}}{\delta^n}\int_{B_{A-(2a/3)}}\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\left(\frac{x-y}{\delta}\right)dy,$$

于是

$$|\partial_j\phi(x)|\leqslant\frac{\delta^{-1}}{\delta^n}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_j\alpha\left(\frac{y}{\delta}\right)dy$$

$$=\delta^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_j\alpha(t)dt\leqslant C(j,n)\cdot a^{-1}.$$

相仿地证下去，便可得到条件(iii). 证毕.

系 4. 设K是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧子集，又设 $(\Omega_j)_{1<j<k}$ 是K的有限开覆盖. 则存在函数 $\phi_j\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得 $0\leqslant\phi_j\leqslant1$, $1\leqslant j\leqslant k$, 并且在K的一个邻域内 $\sum_{j=1}^{k}\phi_j=1$.

证明 我们能够找出紧集 $(K_j)_{1<j<k}$ 使得 $K_j\subset\Omega_j$ 以及

$$K\subset\bigcup_{j=1}^{k}\mathring{K}_j,$$

这里 $\mathring{K}_j$ 表示 K_j 的内部. 对每一个 j, 令 $\psi_j\in C_C^\infty(\Omega_j)$, 使得 $0\leqslant\psi_j\leqslant1$ 以及在 K_j 上 $\psi_j=1$. 取

$$\phi_1=\psi_1,\ \phi_j=\psi_j(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_{j-1}),\ j=2,\ \cdots,\ k,$$

易知函数 $(\phi_j)_{1<j<k}$ 满足所要求的性质. 证毕.

称函数 $(\phi_j)_{1<j<k}$ 是*从属于 K 的覆盖 $(\Omega_j)_{1<j<k}$ 的单位 C^∞ 分解*.

3. 半范；局部凸空间

设 E 是域K上的向量空间，我们常常设域K是实数域 $\mathbb{R}$ 或复

数域 $\mathbb{C}$. 并记 $\mathbb{R}_+$ 是所有非负实数组成的集.

定义 1.6. E 上的半范是一个映射 $p: E \to \mathbb{R}_+$, 满足以下公理:

(i) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y), \ \forall x, y \in E$;

(ii) $p(\lambda x)=|\lambda| p(x), \ \forall x \in E, \ \forall \lambda \in K$.

如果 p 还满足下列公理:

$$p(x)=0 \text{ 当且仅当 } x=0.$$

我们就称 p 是范数.

例 1. 设 p 为实数, $1 \leqslant p<+\infty$, 映射

$$x=(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to \|x\|=\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \in \mathbb{R}_+$$

定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的一个范数. 同样

$$\|x\|_\infty=\sup_{1 \leqslant i \leqslant n}|x_i|$$

也是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个范数.

2. 设 $I=[a, b]$, 又设 $C(I)$ 是定义在 I 上的所有复值连续函数组成的向量空间. 若 $f \in C(I)$, 则

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)| dt \text{ 和 } \|f\|_\infty=\sup_{t \in I}|f(t)|$$

定义了 $C(I)$ 上的两个范数.

3. 记 $L^p(I)$ $(1 \leqslant p<+\infty)$ 是定义在 I 上的可测函数 f 全体所组成的空间, 并且 $|f|^p$ 在 I 上 Lebesgue 可积. 可以证明

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

是 $L^p(I)$ 上的一个半范.

4. 设 X 是一个拓扑空间, 并设 $C(X)$ 是 X 上的所有复值连续函数所组成的向量空间. 设 K 是 X 的紧子集, 定义

$$p_K(f)=\sup_{t \in K}|f(t)|.$$

对每一个 K, 映射 $p_K: C(X) \to \mathbb{R}_+$ 是一个半范.

局部凸空间

设 E 是 K 上的向量空间. 我们说 E 上定义的拓扑和 E 的向

量空间结构是相容的，如果映射

$$(x,\ y)\in E\times E\to x+y\in E,$$
$$(\lambda,\ x)\in K\times E\to \lambda x\in E$$

是连续的．一个向量空间装备着相容的拓扑就称为拓扑向量空间(TVS)．TVS 的拓扑能够用原点的基本邻域组(或基)来表达．在一个拓扑空间内，我们称由一些集所组成的一个集族是某点的基本邻域组是指：如果这个集族内的每一个集皆包含该点，并且这一集族内的任何两个集之交都含有此集族内的一个集，以及该点的任何邻域皆含有此集族内的一个集．

由于我们将要处理的所有空间都是局部凸空间，在这些空间里原点的基本邻域组很容易用一族半范来表达，这里，我们将不去讨论拓扑向量空间的一般定义或原点的邻域的一般性质．读者可参阅文献[6, 12, 17 和 19]．

设 p 是 E 上的半范，一个以 $x_0\in E$ 为中心以 $r>0$ 为半径的开(或闭)球是

$$B(x_0,\ r)=\{x\in E: p(x-x_0)<r\}$$

(或 $\bar{B}(x_0,\ r)=\{x\in E: p(x-x_0)\leqslant r\}$)．$x_0$ 的一个邻域是含有以 x_0 为中心的某个球的集 V．容易看出，对 E 中的任何元素 x_0，所有以 x_0 为中心的开(闭)球定义出 x_0 的基本邻域组，它与 E 的向量空间结构相容．

而且，若 a 是 E 中固定的元素，又若 $\lambda\neq 0$ 是 K 中固定的元素，映射

$$x\to a+x\ (\text{平移}),$$
$$x\to \lambda x\quad (\text{相似})$$

是 E 上的同胚．这表明为了知道点 $a\in E$ 的基本邻域组，只要知道原点的基本邻域组就可以了．

设 $(p_i)_{i\in I}$ 是定义在 E 上的一族半范．对每一个 $x_0\in E$，正实数 ε，以及 I 的有限子集 F，定义

$$V(x_0,\ \varepsilon,\ F)=\{x\in E: p_i(x-x_0)<\varepsilon,\ i\in F\}.$$

显然集 $V(x_0,\ \varepsilon,\ F)$ 是对应于半范 $p_i(i\in F)$ 的以 x_0 为中心、以

ε 为半径的球之交.

当 ε 遍历所有正实数集, F 遍历 I 中所有有限子集, 由集 $V(x_0, \varepsilon, F)$ 所组成的族定义出 x_0 点的基本邻域组, 它和 E 的向量空间结构相容. 装备有这一拓扑的向量空间 E, 就称为*局部凸拓扑向量空间*(LCS).

若 E 是 LCS, 其拓扑是由一族半范 $(p_i)_{i\in I}$ 定义的, 那么容易证明 E 是 Hausdorff 空间当且仅当下述情形成立: 对于 E 中任何一对元素 x 和 y, $x\neq y$, 存在一个半范 p_K 使得 $p_K(x)\neq p_K(y)$.

凸集和平衡集

定义 1.7. 设 A 是K上向量空间 E 的子集, 如果给定两点 $x, y\in A$, 线段

$$\alpha x+\beta y$$

(这里 $\alpha, \beta\in\mathbb{R}_+$ 并且 $\alpha+\beta=1$) 含在 A 内, 就称 A 是凸的.

例 1. 整个空间 E 是凸的; 空集是凸的.

2. 球是凸集.

3. 线段是凸集.

4. 若 $(A_i)_{i\in I}$ 是 E 的一族凸集, 则交

$$A=\bigcap_{i\in I} A_i$$

是一个凸集.

定义 1.8. 设 A 是 E 的一个子集, E 中包含 A 的最小的凸子集称为 A 的*凸包*.

对于给定的集 A, 其凸包总可以定义出的. 事实上, 只要取所有包含 A 的凸集族之交就可以了, 并注意到此族中含有整个空间 E, 因而这一凸集族非空.

我们记 $\Gamma(A)$ 是 A 的凸包. 它亦可表达如下: $\Gamma(A)$ 是所有这样的元素 $x\in E$ 所组成的集, 这种元素能表示成有限和

$$x=\sum_{i\in F}\alpha_i x_i,$$

其中 $x_i\in A$, $\alpha_i\in\mathbb{R}_+$, $\sum_{i\in F}\alpha_i=1$, 且 F 是依赖于 x 的有限指标集.

定义 1.9. E 的一个子集 A, 如果对所有 $\lambda\in K$, $|\lambda|\leqslant 1$, 有 $\lambda A\subset A$, 就称 A 是平衡的.

例 1. 以原点为中心的球都是平衡集.

2. 设 $E=\mathbb{R}$, 集 $[0, 1]$ 是凸的, 但非平衡的.

设 A 是 E 的一个凸平衡子集. 那么容易验证对任何一对点 $x, y\in A$ 以及所有 $\alpha, \beta\in K$, $|\alpha|+|\beta|\leqslant 1$, 我们有

$$\alpha x+\beta y\in A.$$

同时, 容易验证 E 的凸平衡子集族的交是 E 的凸平衡子集.

定义 1.10. 设 A 是 E 的一个子集, E 中包含 A 的最小的凸平衡子集 $\Gamma_b(A)$, 称为 A 的平衡凸包.

给定 A, 很明显, 它的平衡凸包是所有包含 A 的平衡凸集之交. 同样, $\Gamma_b(A)$ 能表达如下: $x\in\Gamma_b(A)$ 当且仅当

$$x=\sum_{i\in F}\alpha_i x_i,$$

其中 $x_i\in A$, $\sum_{i\in F}|\alpha_i|\leqslant 1$, F 是有限指标集.

吸 收 集

定义 1.11. V 是向量空间 E 的一个子集. 如果给定 $x\in E$, 存在实数 $\lambda>0$, 使得 $\lambda x\in V$, 就称 V 是吸收的.

例 1. 在实直线 $\mathbb{R}$ 内, 集 $\{-1, 0, 1\}$ 是吸收集, 同样, 以原点为中心的圆周加上原点所组成的集是 $\mathbb{R}^2$ 中的吸收集.

2. 以原点为中心的球是吸收集. 更一般地, 在一个拓扑向量空间内, 原点的每一个邻域都是吸收集.

设 E 是向量空间, 装备着半范 p. 单位球

$$U=\{x\in E: p(x)<1\}$$

满足下列性质: (i) U 是平衡凸集; (ii) U 是吸收的.

反过来, 我们来证明若 V 是 E 的平衡凸吸收子集, 那么

$$q(x)=\inf\{\lambda\geqslant 0: x\in\lambda V\}$$

是 E 上的半范.

事实上, 因 V 是吸收的, 故 q 在 E 上有定义并且 $q: E\to\mathbb{R}_+$.

若 $x, y \in E$，令 $\lambda>0$ 和 $\mu>0$，使得

$$x \in \lambda V \quad \text{和} \quad y \in \mu V.$$

因 V 是凸的，我们有

$$x+y \in \lambda V+\mu V=(\lambda+\mu)\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu} V+\frac{\mu}{\lambda+\mu} V\right] \subset(\lambda+\mu) V.$$

这意味着 $\qquad q(x+y) \leqslant q(x)+q(y)$。

最后，由 V 是平衡集的假设得到

$$q(\lambda x)=|\lambda| q(x).$$

证毕.

容易证明下列关系式：

$$\{x \in E: q(x)<1\} \subset V \subset\{x \in E: q(x) \leqslant 1\}.$$

现在，我们能证明下面的定理，它给出了局部凸空间的特征，同时指出给予这一空间的名称是合理的.

定理1.2. 设 E 是拓扑向量空间. 则下列条件等价：

(1) E 是局部凸.

(2) 存在原点的基本凸邻域组.

(3) 存在原点的基本吸收平衡凸邻域组.

证明 (1)⇒(2). 如果 E 上的拓扑是由一族半范 $(p_i)_{i \in I}$ 所定义，则集

$$V(F, \varepsilon)=\{x \in E: p_i(x) \leqslant \varepsilon, i \in F\}$$

组成原点的基本凸邻域组，其中 F 是 I 的一个有限子集，且 $0<\varepsilon<1$.

(3)⇒(1). 在原点的基本邻域组中，E 的每一个吸收平衡凸子集 V 都联系着半范 p_V. 容易看出，由这种方法所获得的一族半范定义了 E 的拓扑.

(2)⇒(3). 只要去证明若 V 是原点的一个凸邻域，那么集

$$U=\bigcap_{|\lambda|=1} \lambda V$$

是原点的一个吸收平衡凸邻域. 因为映射 $(\mu, x) \rightarrow \mu x$ 在点 $(0,0)$ 是连续的，于是存在 $\varepsilon>0$ 和 E 中 0 点的一个邻域 V'，使得

对所有的 $|\mu| \leqslant \varepsilon$ 和所有 $x \in V'$ 有 $\mu x \in V$.

或等价地，存在 0 点的一个邻域 W 使得

$$对所有的\ |\mu|\leqslant 1\ 有\ \mu W\subset V.$$

后一个关系式蕴涵着

$$对所有\ |\mu|=1\ 有\ \mu W\subset V.$$

于是对所有 $|\lambda|=1$, $W\subset\lambda V$, 这意味着 U 是 E 中 0 点的一个邻域.

很明显, U 是凸集(它是凸集之交)并且是吸收的. 我们再证明 U 是平衡的. 若 $x\in U$, 线段 $[0, x]$ 是含在 U 内的, 即

$$对所有\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1,\ 有\ \lambda x\in U.$$

另一方面, 若 $x\in U$, 由 U 的定义知道, 对一切 $|\lambda|=1$, 有 $\lambda x\in U$. 于是, 若 $\mu\neq 0$ 以及 $|\mu|\leqslant 1$, 我们得

$$\mu x=|\mu|\frac{\mu}{|\mu|}x\in U.$$

这就证明了 U 是平衡的. 证毕.

4. 局部凸空间的例

1. 半范空间是局部凸空间. 特别, 赋范空间是局部凸的.

2. 设 X 是局部紧拓扑空间. $C(X)$ 是 X 上所有复值连续函数组成的空间, 又设 K 是 X 中所有紧子集组成的集族, 那么半范族 $(p_k)_{k\in K}$, 这里 $p_k(f)=\sup\limits_{t\in k}|f(t)|$, 定义了 $C(X)$ 上的 Hausdorff 局部凸拓扑. 能够看出, $C(X)$ 的函数序列 (f_j) 在这一拓扑下收敛于 0 当且仅当 $f_j(x)$ 在 X 的每一个紧集上一致收敛于 0. 由于这一理由, 我们称该局部凸拓扑是在 X 的紧子集上一致收敛的拓扑.

特别是, 若 $X=\Omega$, 它是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, 这样的拓扑能够由一列半范所确定. 事实上, 只要取 Ω 内一列单调增加的紧子集序列 $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$, 它们的和是 Ω, 这一列紧子集对应着一列半范 $(p_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$. 在这种情形下, $C(\Omega)$ 上的拓扑是由原点的可列基本邻域组所确定的. 这一 Hausdorff 局部凸空间 $C(\Omega)$ 是可距离化的空间[4, 18]. 此外, 由古典的极限定理, 在 Ω 的紧集上一致收敛

的连续函数的极限仍为连续函数，所以 $C(\Omega)$ 是完备的空间．我们称定义在 $C(\Omega)$ 上的这一拓扑为自然拓扑．

定义 1.12． 一个 Hausdorff 局部凸，而且可距离化的完备空间称为 Frechet 空间．

3．设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集，又设 $0\leqslant p<+\infty$，记 $L^p_{loc}(\Omega)$ 是由在 Ω 的任一紧集 K 上满足

$$\left(\int_K |f(x)|^p dx\right)^{1/p}<+\infty$$

的所有可测函数组成的空间．称 $L^p_{loc}(\Omega)$ 中的元素为 p 次局部可积函数．定义半范

$$p_K(f)=\left(\int_K |f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

当 K 跑遍 Ω 的所有紧子集时，半范族 (p_K) 定义了 $L^p_{loc}(\Omega)$ 上的局部凸拓扑．这一拓扑可以由可列个半范所确定，并且可以证明 $L^p_{loc}(\Omega)$ 是 Frechet 空间．用类似的方法，我们可以定义 Frechet 空间 $L^\infty_{loc}(\Omega)$．

5．对　　偶

给定域 K 上的向量空间 E，它的代数对偶 E^* 是由所有线性映射 $x^*: E\to K$ 组成的向量空间．我们记

$$x^*(x) \text{ 或 } \langle x, x^*\rangle$$

是 x^* 在 $x\in E$ 上的值．

当 E 是域 K（我们总设它是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$）上的拓扑向量空间时，E 的对偶 E' 是 E^* 的子空间，它是由 E 上的所有连续线性映射（或泛函）组成的．

对每一个 $x^*\in E^*$，我们设

$$p_{x^*}(x)=|\langle x, x^*\rangle|,$$

则 p_{x^*} 定义出 E 上的一个半范，并且族 $(p_{x^*})_{x^*\in E^*}$ 定义了 E 上的局部凸拓扑，记它为 $\sigma(E, E^*)$．同样我们可以定义 E^* 上的拓扑

$\sigma(E^*, E)$. 当 E 是一个拓扑向量空间时，由半范族 $(p_{x'})_{x'\in E'}$ 所定义的 E 上的拓扑 $\sigma(E, E')$ 称为 E 的弱拓扑. 显然，它比 E 上已给定的拓扑弱，同时也比 $\sigma(E, E^*)$ 弱.

用同样的方法，我们能够定义出 E 的对偶 E' 上的弱拓扑 $\sigma(E', E)$. 由此立即可知，在 E' 内序列 (x'_j) 弱收敛于 0 当且仅当对每一个 $x\in E$，序列 $(x'_j(x))$ 在 K 内收敛于 0. 于是，E' 上的弱拓扑与点态收敛拓扑相一致.

在一个拓扑向量空间 E 的对偶 E' 上，我们还可以定义其他的很重要的局部凸拓扑，例如 E' 的强拓扑，为此，我们需要下列定义.

定义 1.13. 设 E 是拓扑向量空间，A 是 E 的一个子集，如果对每一个给定的原点的邻域 V，必存在一个数 $\lambda>0$，使得 $\lambda A\subset V$，我们就称 A 是有界的.

当 E 是局部凸向量空间时，由定理 1.2，每一个 0 点的邻域都含有 0 点的平衡邻域，于是定义 1.13 等价于：若对每一个 0 点的邻域，存在数 $\varepsilon>0$，使得对所有 $|\lambda|\leqslant\varepsilon$ 有 $\lambda A\subset V$，就称 A 是有界的.

我们注意这两个定义在一般情形下也是等价的. 这是因为能够证明在任何拓扑向量空间中，都含有 0 点的基本且平衡的邻域组.

例 1. E 的有限子集是有界集.

2. 半范空间内的球是有界集.

3. 局部凸空间内的任何相对紧子集 A 是有界的. 事实上，在 E 中给定 0 点的邻域 V，必存在 0 点的开邻域 W 使得 $W+W\subset V$ 以及对任何 $|\mu|\leqslant 1$ 有 $\mu W\subset W$. 因 A 是相对紧，我们能够找到 A 中一个有限子集 $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ 使得开集 $(x_j+W)_{1\leqslant j\leqslant p}$ 覆盖 A. 又因集 $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ 在 E 中有界，我们能找到实数 $0<\lambda<1$ 使得 $\lambda x_j\subset W$，$1\leqslant j\leqslant p$. 于是我们有

$$\lambda A\subset\bigcup_{j=1}^{p}\lambda(x_j+W)\subset W+W\subset V,$$

从而 A 是有界的. 证毕.

定义 1.14. 设 B 是拓扑空间 E 的子集,集 B° 是 B 的极集,其定义如下:

$$B^\circ=\{x'\in E':|\langle x, x'\rangle|\leqslant 1, \forall x\in B\}.$$

现在我们来证明: 若 A 是 E 的有界子集, 它的极集 A° 是 E' 的一个吸收平衡凸子集. 事实上, 若 $x', y'\in A^\circ$ 以及 α, β 是非负实数使得 $\alpha+\beta=1$, 则

$$|\langle x, \alpha x'+\beta y'\rangle|\leqslant\alpha|\langle x, x'\rangle|+\beta|\langle x, y'\rangle|\leqslant 1,$$

于是 A° 是凸的.

若 $x'\in A^\circ$ 以及 $\lambda\in K$ 使得 $|\lambda|\leqslant 1$, 那就有

$$|\langle x, \lambda x'\rangle|=|\lambda||\langle x, x'\rangle|\leqslant 1,$$

于是 $\lambda x'\in A^\circ$, 这就证得 A° 是平衡的.

最后,设 $z'\in E'$, 并考虑 E 中 0 点的下列邻域:

$$V=\{x\in E:|\langle x, z'\rangle|\leqslant 1\}.$$

因 A 是 E 的有界子集,故存在 $\lambda>0$ 使得 $\lambda A\subset V$; 于是

$$|\langle x, \lambda z'\rangle|=|\langle\lambda x, z'\rangle|\leqslant 1, \quad \forall x\in A,$$

这就证明了 A° 是 E' 中的吸收集.

这样一来, 由第 3 节定理 1.2 的结论, 对 E 的每一个有界子集 A, 都对应着 E' 上的半范:

$$p_{A^\circ}(x)=\inf\{\lambda\geqslant 0, x'\in\lambda A^\circ\}.$$

若记 $\mathcal{B}$ 是 E 的所有有界子集组成的族, 由半范族 $(p_{A^\circ})_{A^\circ\in\mathcal{B}}$ 定义出 E' 上 Hausdorff 局部凸拓扑, 称为 E' 的强拓扑. 可以证明在 E' 内序列 (x'_j) 强收敛于 0 当且仅当在 E 的每一个有界集上序列 $(x'_j(x))$ 一致收敛于 0, 由于这一理由, E' 上强拓扑也称为在 E 的有界集上一致收敛的拓扑. 我们把装备着强拓扑的对偶 E' 记为 E'_b.

作为例子, 若 E 是赋范空间, 它的对偶 E' 装备着范数

$$\|x'\|_{E'}=\sup_{\|x\|_E\leqslant 1}|\langle x, x'\rangle|,$$

就成为 Banach 空间. 于是, E' 上的强拓扑与由上述范数所定义的拓扑相一致.

自 反 空 间

如果记 E'' 是 Banach 空间 E' 的对偶，那么在 E'' 上能够定义范数

$$\|x''\|_{E''}=\sup_{\|x'\|_{E'}\leq 1}|\langle x', x''\rangle|,$$

这样就使得 E'' 成为 Banach 空间.

每一个元素 $x\in E$，定义了 E' 上的一个连续线性泛函 $\tilde{x}$ 如下：

$$\tilde{x}(x')=\langle x, x'\rangle, \forall x'\in E'.$$

下面证明映射 $x\to\tilde{x}$ 是 E 到 E'' 内的等距映射. 如果这一等距映射是在上的，我们就称 E 是自反空间.

更一般地，令 E 是 Hausdorff 拓扑向量空间，并设 E'_b 是它的强对偶. E 的两次对偶 E'' 按定义是 E'_b 的对偶. 如同上面所说，我们可以定义映射 $x\in E\to\tilde{x}\in E''$. 如果这一映射是 E 到 E''_b 上的同构，我们就称拓扑向量空间 E 是自反的.

例 1. n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是自反的. 更一般地有限维 Hausdorff 拓扑向量空间是自反的.

2. Hilbert 空间是自反空间.

3. Banach 空间 $L^p(\Omega)$, $1<p<+\infty$, 是自反的. 空间 $L^1(\Omega)$ 和 $L^\infty(\Omega)$ 都不是自反的.

6. 诱导极限拓扑

我们在一个特殊且简单的情况下来定义诱导极限拓扑，这对下一章定义广义函数是足够了. 至于诱导极限的更一般讨论，读者可以参阅文献 6, 12, 17, 19 和 32.

设 $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列增加的局部凸空间，使得对任何 i，恒等映射 $E_i\to E_{i+1}$ 是连续的. 设

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,$$

在 E 上定义如下拓扑，它使得对每个 $i=1, 2, \cdots$，恒等映射 $E_i \to E$ 是连续的最强的局部凸拓扑，称这一拓扑为由子空间 E_i 定义的诱导极限拓扑．空间 E 装备着这一拓扑就称为空间 $(E_i)_{i\in N}$ 的诱导极限．

为了使得在诱导极限拓扑内凸集 V 是 0 点的一个邻域，其必要和充分条件是对所有 $i=1, 2, \cdots$，每一个交 $V\cap E_i$ 是 E_i 中 0 点的邻域．又，通过取所有凸包

$$V=\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right)$$

而得到 E 中原点的基本邻域组，其中 V_i 遍历 E_i 中 0 点的基本凸邻域组，$i=1, 2, \cdots$．

命题 1.1. 设 E 是 $(E_i)_{i\in N}$ 的诱导极限，并设 F 是任何局部凸空间．一线性映射 $u: E\to F$ 是连续的当且仅当对所有 i，u 的限制 u_i 是 E_i 到 F 内的连续映射．

证明 若 u 连续，则每一个限制 u_i 亦连续，这是因为按定义，恒等映射 $E_i\to E$ 是连续的．反过来，设每一个 u_i 是 E_i 到 F 内的连续映射．给定 F 内 0 点的凸邻域 U，存在 E_i 内的 0 点凸邻域 V_i 使得 $u_i(V_i)\subset U$．则

$$V=\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right)$$

是 E 内 0 点的邻域并且显然 $u(V)\subset U$；于是 u 是 E 到 F 内的连续映射．证毕．

定理 1.3. 设向量空间 E 是一列增加的局部凸空间 $(E_i)_{i\in N}$ 之和，使得

(1) 对每一个 i，恒等映射 $E_i\to E_{i+1}$ 是连续的．

(2) 对任何 i，E_i 上由 E_{i+1} 导出的拓扑与 E_i 的拓扑相一致．

(3) 对任何 i，E_i 是 E_{i+1} 的闭子空间．

则 (i) E 的诱导极限拓扑导出每个 E_i 上的原先的拓扑．(ii) 子集 A 在诱导极限 E 内是有界的当且仅当存在一个指标 j，使得 A 含在 E_j 内并且在 E_j 内有界．

证明基于下面的引理

引理1.1. 设 F 是局部凸空间并设 G 是 F 的闭子空间. 假定 V 是 G 内原点的平衡凸开邻域, 并设 $x\in F$ 使得 $x\notin G$. 则在 F 内存在原点的一个平衡凸开邻域 W 使得 $x\notin W$ 以及 $W\cap G=V$.

证明 因 G 在 F 中是闭的, 故在 F 内存在 0 点的平衡凸开邻域 V_0, 使得

$$(x+V_0)\cap G=\emptyset \quad 以及 \quad V_0\cap G\subset V.$$

令 W 是 $V\cup V_0$ 的平衡凸包. 容易看出 W 是开的. 现在我们证明 $W\cap G=V$. 显然, $W\cap G\supset V$. 若 $w\in W\cap G$, 我们能够写出(见习题 21)

$$w=\alpha v+\beta v_0$$

其中 $v\in V$, $v_0\in V_0$ 和 $|\alpha|+|\beta|\leqslant 1$. 可以假定 $\beta\neq 0$, 否则将无需证明了. 但上面的关系意味着 $v_0\in V_0\cap G\subset V$, 于是 $w\in V$. 最后, 用反证法, 设 $x\in W$. 则 $x=y+z$, 其中 $y\in G$, $z\in V_0$. 于是

$$y=x-z\in (x+V_0)\cap G,$$

这是不可能的. 证毕.

定理1.3. 的证明 1. 为了证明在每个 E_i 上由 E 导出的拓扑和 E_i 上已给定的拓扑相一致, 只要证明, 对 E_i 中给定的 0 点的一个平衡凸邻域 V_i, 存在 E 中 0 点的一个邻域 V 使得

$$V_i=V\cap E_i, \ \forall i.$$

利用引理, 容易看出在 E_{i+k} 中存在 0 点的平衡凸邻域序列

$$(V_{i+k}), \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

使得 $$V_{i+k-1}=V_{i+k}\cap E_{i+k-1}, \quad k=1,\ 2,\ \cdots.$$

若我们设 $$V=\bigcup_{k=0}^{\infty}V_{i+k},$$

不难看出 V 是 E 中 0 点的邻域并且 $V_i=V\cap E_i$.

2. 设 A 是 E 中有界集. 用反证法, 假定不存在这样的指标 i 使得 A 含在 E_i 内. 于是, 我们能找到一个增加的指标序列 (i_n) 和 E 中一个序列 (x_n) 使得

$$x_n\in A\cap E_{i_n} \quad 和 \quad x_n\notin E_{i_{n-1}}.$$

由引理，存在序列 (V_n)，V_n 是 E_{i_n} 中的 0 点的平衡凸开邻域，使得

$$x_n \notin nV_n \quad 和 \quad V_n \cap E_{i_{n-1}} = V_{n-1}.$$

令 $V = \bigcup_1^\infty V_n$. 则 V 是 E 内 0 点的邻域，使得

$$V \cap E_{i_n} = V_n \quad 和 \quad x_n \notin nV.$$

这和 A 是有界的假设矛盾. 证毕.

例 1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 内的一个开集，又设 (K_i) 是 Ω 的一个增加的紧子集序列，使得 $\Omega = \bigcup_i K_i$. 设

$$E = C_0(\Omega)$$

是定义在 Ω 内的所有有紧支柱的复值连续函数全体所组成的空间. 令

$$E_i = C_0(\Omega; K_i)$$

是 $C_0(\Omega)$ 的子空间，它包含所有紧支柱在 K_i 内的函数. 显然

$$C_0(\Omega) = \bigcup_i C_0(\Omega; K_i).$$

在 $C_0(\Omega; K_i)$ 上，我们定义在 K_i 上一致收敛的拓扑(见第 4 节例 2). 这一拓扑是由半范

$$p_{K_i}(f) = \sup_{x \in K_i} |f(x)|$$

所定义的局部凸拓扑. 容易看出 p_{K_i} 不仅是半范而且实际上还是 $C_0(\Omega; K_i)$ 上的范数，装备着这一范数时，$C_0(\Omega; K_i)$ 是一个 Banach 空间. 我们留给读者去验证嵌入

$$C_0(\Omega; K_i) \to C_0(\Omega; K_{i+1})$$

是连续的. 同样，$C_0(\Omega; K_i)$ 是 $C_0(\Omega; K_{i+1})$ 的闭子空间. 定理 1.3 的所有假设都满足，我们在 $C_0(\Omega)$ 上定义空间 $C_0(\Omega; K_i)$ 的诱导极限拓扑. 这一拓扑称为 $C_0(\Omega)$ 的*自然拓扑*.

作为定理 1.3 的一个结果，我们能够看出，$C_0(\Omega)$ 内的序列 (f_j) 收敛于 0 当且仅当下列条件满足：(i) 存在 Ω 的一个紧集 K，使得对任何 j, $\operatorname{supp} f_j \subset K$；(ii) 序列 (f_j) 在 K 上一致收敛于 0.

定义 1.15. Ω 上的 Radon 测度是 $C_0(\Omega)$ 上的连续线性泛函.

Ω 上所有 Radon 测度组成的空间记为 $M(\Omega)$. 它是 $C_0(\Omega)$ 的拓扑对偶. 为了使得线性映射

$$\mu: C_0(\Omega) \to \mathbb{C}$$

是一个 Radon 测度, 其必要和充分条件是: 对 Ω 的每一个紧子集 K, 线性映射 μ 在 $C_0(\Omega;\ K)$ 的限制是连续的. 这由命题 1.1 立即得出. 等价地, 线性映射是 Ω 上 Radon 测度当且仅当对 Ω 的每一个紧子集 K, 存在一个常数 M_K, 使得

$$|\mu(\phi)| \leqslant M_K \cdot \sup_{x \in K} |\phi(x)|,\ \forall \phi \in C_0(\Omega;\ K).$$

Radon 测度的一个例子是, 对每一个在 Ω 内局部可积的函数 f (特别, 每一个连续函数), 则

$$\mu_f(\phi) = \int_\Omega f\phi,\ \forall \phi \in C_0(\Omega)$$

确定 Ω 上的一个 Radon 测度.

此外, 若 $L^1_{loc}(\Omega)$ 表示所有在 Ω 上局部可积函数组成的向量空间, 则映射

$$f \to \mu_f$$

给出 $L^1_{loc}(\Omega)$ 到 $M(\Omega)$ 内的嵌入. 事实上, 若在 $C_0(\Omega)$ 上 $\mu_f \equiv 0$, 则 f 在 Ω 内必定几乎处处为零, 于是 f 是 $L^1_{loc}(\Omega)$ 的零元素.

关于 Radon 测度的更一般的讨论, 读者可参阅 Bourbaki[5].

2. 空间 $L^p_c(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, 并设 K 是 Ω 的任意一个紧子集. 记 $L^p(K)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 是 p 次可积函数并且具有含在 K 内的紧支柱、装备着自然范数的空间. 当 $p=\infty$ 时, $L^\infty(\Omega)$ 是本性有界函数并且具有含在 K 内的紧支柱、装备着自然范数的空间. 空间 $L^p(K)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, 是 Banach 空间; 若 $K_1 \subset K_2$, 则嵌入 $L^p(K_1) \to L^p(K_2)$ 是连续的, 而且 $L^p(K_1)$ 上由 $L^p(K_2)$ 导出的拓扑与 $L^p(K_1)$ 的拓扑一致. 对 Ω 的所有紧子集 K, $L^p(K)$ 之和记为 $L^p_c(\Omega)$. 若 (K_i) 是 Ω 的一列增加的紧子集, 其和为 Ω, 显然 $L^p_c(\Omega)$ 和 $L^p(K_i)$, $i=1, 2, \cdots$, 满足定理 1.3 的

所有假设. 我们能够在 $L_0^p(\Omega)$ 上定义与子空间 $L^p(K_i)$ ($i=1, 2, \cdots$) 相联系的诱导极限拓扑.

习　题

1. 利用 Leibniz 公式展开 $\Delta(u\cdot v)$ 和 $\Delta^2(u\cdot v)$, 这里

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

2. 在 $n=1$ 的情形下写出 Leibniz 公式(1.1).

3. 若 $p\in\mathbb{N}^n$, 证明

$$\partial^p(u\cdot v)=\sum_{q+r=p}\frac{p!}{q!\,r!}\,\partial^q u\cdot\partial^r v.$$

4. 设 $\langle x, \xi\rangle=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$, 并设 $P(\partial)$ 是一个偏微分算子. 证明

$$P(\partial)(u(x)e^{\langle x, \xi\rangle})=e^{\langle x, \xi\rangle}P(\partial+\xi)u(x).$$

5. 证明第 2 节中定义的函数 $\beta(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 内的 C^∞ 函数.

6. 设 v 是 $\mathbf{R}^n$ 内的连续函数并具有紧支柱, 又设 v_ε 是 v 和 α_ε 的卷积. 证明: (i) $v_\varepsilon\to v$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是一致的; (ii) 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 内 $v_\varepsilon\to v$, $1\leqslant p<+\infty$.

7. 设 $C_0(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 内所有连续的并且在∞处收敛于 0 的函数 f 组成的空间. 在∞处收敛于 0 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在紧子集 $K\subset\mathbf{R}^n$, 使得对一切 $x\notin K$ 有 $|f(x)|<\varepsilon$. 证明每一个 $f\in C_0(\mathbf{R}^n)$ 都能够被 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的函数在 $\mathbf{R}^n$ 内一致逼近.

8. 证明第 3 节例 1 和例 2 中定义的映射是范数, 而例 3 和例 4 中定义的是半范.

9. 设 E 是半范空间. 即它是向量空间, 并且在其上装备着由一个半范 P 定义的拓扑. 证明映射

$$(x, y)\in E\times E\to x+y\in E$$
$$(\lambda, x)\in K\times E\to\lambda x\in E$$

是连续的.

10. 证明由第 9 页上的集族 $V(x_0, \varepsilon, F)$ 所定义的 x_0 点的基本邻域组, 再由这些组所产生的拓扑与 E 的向量空间结构相容.

11. 设 E 是拓扑向量空间. 证明映射

$$x\in E\to a+x\in E$$

和

$$x\in E\to\lambda x\in E$$

其中 $a\in E$, $\lambda\in K$, $\lambda\neq 0$, 都是 E 上的同胚.

12. 证明凸集之交仍为凸集.

13. 证明 A 的凸包可以用第 10 页上所叙述的那样来表达.

14. 设 q 是由平衡，凸，且为吸收集 V 所定义的半范，证明

$$\{x\in E: q(x)<1\}\subset V\subset\{x\in E: q(x)\leqslant 1\}.$$

15. 完成定理 1.2 中从条件(iii)推出条件(i)的证明.

16. 设 E 是一个向量空间，并设 M 是 E 的代数对偶 E^* 的子空间. 证明由一族半范 $(p_{x^*})_{x^*\in M}$ 定义的 E 上的局部凸拓扑，和由一族半范 $(p_{x^*})_{x^*\in F}$ (其中 F 是由 M 所张成的 E^* 的子空间)，所定义的局部凸拓扑是一致的.

17. 设 E 是拓扑向量空间，并设 E' 是它的对偶. 证明弱拓扑 $\sigma(E', E)$ 弱于强拓扑.

18. 设 E 是拓扑向量空间. 证明强对偶 E'_b 内序列 (x'_j) 收敛于 0 当且仅当在 E 的任何有界集上数列 $(x'_j(x))$ 一致收敛于 0.

19. 设 G 是拓扑向量空间 E 的一族有界集. 证明由一族半范 $(p_{A^\circ})_{A\in G}$ 所定义的 E' 上的拓扑在将 G 换成 G_1 时保持不变，这里 G_1 是 E 的一族有界集，它是由 G 的相似集的有限和所得出的.

20. 设 E 和 F 是两个拓扑向量空间，又设 $u: E\to F$ 是连续线性映射. 证明若 A 在 E 中有界，则 $u(A)$ 在 F 中有界.

21. 若 A 和 B 是两个凸集，证明每个 $z\in\Gamma(A\cup B)$ 能写为 $z=\alpha x+\beta y$，这里 $x\in A$, $y\in B$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$. 若 A 和 B 是两个平衡凸集，证明每个 $z\in\Gamma_0(A\cup B)$ 能写为 $z=\alpha x+\beta y$，且 $x\in A$, $y\in B$, $|\alpha|+|\beta|\leqslant 1$.

22. 证明在引理 1.1 的证明中构造出的集 W 是开的.

23. 证明若 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集，则存在一个增加的紧集序列 (K_j)，使得 $K_j\subset\Omega$ 和 $\cup_j K_j=\Omega$.

24. 设 $C_c(\Omega; K)$ 装备着在 K 上一致收敛的拓扑. 证明：(i) $C_c(\Omega; K)$ 是 Banach 空间；(ii) 这一拓扑和由 $C(\Omega)$ 导出的拓扑是一致的.

25. 设 K 和 L 是 Ω 的两个紧集，$K\subset L$. 证明嵌入 $C_c(\Omega; K)\to C_c(\Omega; L)$ 是连续的并且 $C_c(\Omega; K)$ 是 $C_c(\Omega; L)$ 的闭子空间.

26. 证明第 6 节例 1 中所建立的 $C_c(\Omega)$ 内收敛序列的特征.

27. 证明线性函数 $\mu: C_c(\Omega)\to\mathbf{C}$ 是 Radon 测度当且仅当对每个紧子集 $K\subset\Omega$，存在一常数 M_k，使得

$$|\mu(\phi)|\leqslant M_k\cdot\sup_{x\in K}|\phi(x)|,\ \phi\in C_c(\Omega; K).$$

28. 我们称 Ω 上的 Radon 测度 μ 在 Ω 的开子集 U 上等于 0，当且仅当 $\mu(\psi)=0$ 对一切 $\psi\in C_c(U)$ 成立. 证明若 μ 在 U_1 上以及在 U_2 上是 0，则 μ 在 $U_1\cup U_2$ 上是 0. (提示：利用单位分解.)

29. 设 μ 是 Ω 上的 Radon 测度，在 Ω 内，使 μ 是 0 的最大的开集之余集，称为 μ 的支柱. 证明若 $f\in L^1_{loc}(\Omega)$，将 f 作为函数或者作为 Radon 测

度，其支柱是相同的.

30. 设 $(C(\Omega))'$ 是 $C(\Omega)$ 的对偶，$C(\Omega)$ 上装备着自然拓扑，证明：$\mu\in(C(\Omega))'$ 当且仅当存在常数 $C>0$ 和一个紧集 $K\subset\Omega$，使得

$$|\mu(\phi)|\leqslant C\cdot\sup_{x\in K}|\phi(x)|,\ \phi\in C(\Omega).$$

31. (i) 证明每一个 $\mu\in(C(\Omega))'$ 定义出 Ω 上的一个 Radon 测度.

(ii) 证明能够将 $(C(\Omega))'$ 看成 $M(\Omega)$ 的子空间，后者是 Ω 上所有 Radon 测度组成的空间.（提示：$C_0(\Omega)$ 是 $C(\Omega)$ 的稠密子空间.）

(iii) 证明 $(C(\Omega))'$ 的元素都是 Ω 上有紧支柱的 Radon 测度.

第 2 章

广义函数

1. $C^m(\Omega)$ 的拓扑

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，又设 $(K_j)_{j=1,2,\cdots}$ 是 Ω 的一列增加的紧子集，它们的和是 Ω. 记 $C^m(\Omega)$ (或按 Schwartz 的记号 [28] 记为 $E^m(\Omega)$) 是所有具有直到 m 阶连续偏导数的复值函数组成的空间. 对每一个 $j=1,2,\cdots$, 定义半范

$$p_{m,j}(\phi)=\sup_{\substack{x\in K_j\\|\alpha|\leqslant m}}|\partial^\alpha\phi(x)|,\ \forall\phi\in C^m(\Omega).$$

这一半范族 $(p_{m,j})_{j=1,2,\cdots}$ 定义了 $C^m(\Omega)$ 上的 Hausdorff 局部凸拓扑. 因为这是可列族，$C^m(\Omega)$ 的每一元素有一个可列基本邻域组. 于是 $C^m(\Omega)$ 是可距离化的空间.

$C^m(\Omega)$ 的拓扑，我们常常把它称作 $C^m(\Omega)$ 的自然拓扑，它是函数以及所有阶数 $\leqslant m$ 的导数在 Ω 的紧子集上一致收敛的拓扑. 事实上，我们有下列结果.

定理 2.1. 序列 (ϕ_K) 在 $C^m(\Omega)$ 内收敛于 0 的充要条件是，对每一个 $|\alpha|\leqslant m$, 序列 $(\partial^\alpha\phi_K)$ 在 Ω 的每一个紧子集上一致收敛于 0.

证明 设 $|\alpha|\leqslant m$, 并设 K 是 Ω 的一个紧子集. 选取 j 使得 $K_j\supset K$, 又设

$$V=\{\phi\in C^m(\Omega):p_{m,j}(\phi)\leqslant\varepsilon\},$$

它是 $C^m(\Omega)$ 中 0 点的邻域，其中 ε 是一个正实数. 若序列 (ϕ_K) 在 $C^m(\Omega)$ 内收敛于 0, 我们能找出指标 k_0, 使得当 $k>k_0$ 时有 $\phi_k\in V$. 换句话说，

$$\sup_{\substack{x\in K_j\\|\alpha|\leqslant m}}|\partial^\alpha\phi_k(x)|\leqslant\varepsilon,\ \forall k\geqslant k_0,$$

这就表示，序列$(\partial^\alpha \phi_k)$在K_j上一致收敛于0，于是在K上亦如此。作为练习，我们把充分条件的证明留给读者。

容易看出，$C^m(\Omega)$的自然拓扑是使得线性映射

$$\partial^\alpha : C^m(\Omega) \to C(\Omega), |\alpha| \leqslant m,$$

为连续的最弱的拓扑，其中空间$C(\Omega)$装备着它的自然拓扑(见习题5)。于是可以将定理2.1重新叙述为：序列(ϕ_j)在$C^m(\Omega)$内收敛于0当且仅当对所有$|\alpha| \leqslant m$，序列$(\partial^\alpha \phi_j)$在$C(\Omega)$内收敛于0。

定理 2.2. 局部凸空间$C^m(\Omega)$是完备的。

证明 设(ϕ_k)是$C^m(\Omega)$内的Cauchy序列。特别，(ϕ_k)是$C(\Omega)$内的Cauchy序列。但$C(\Omega)$是一个完备空间(第1章第4节例2)；于是，序列(ϕ_k)收敛于$C(\Omega)$的一个元素ψ。另一方面，对每个$1 \leqslant i \leqslant n$，序列$(\partial_i \phi_k)$也是$C(\Omega)$内的Cauchy序列。于是，在$C(\Omega)$内$\partial_i \phi_k \to \psi_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$。由分析中的古典定理[26, p.140]得$\psi_i = \partial_i \psi$，$1 \leqslant i \leqslant n$。再利用归纳法，我们可以证明对任何$|\alpha| \leqslant m$，序列$(\partial^\alpha \phi_k)$收敛于$C(\Omega)$中的一个元素$\psi_\alpha$并且$\psi_\alpha = \partial^\alpha \psi$。证毕。

根据定义1.12，$C^m(\Omega)$是一个Frechet空间。

设$C^\infty(\Omega)$(或者按Schwartz的记号[28]记为$E(\Omega)$)是Ω内无穷可微函数组成的空间。可列半范族$(p_{m,j})_{m=0,1,2,\cdots}$，$j=1, 2, 3, \cdots$定义了$C^\infty(\Omega)$上的局部凸Hausdorff拓扑，称为$C^\infty(\Omega)$的自然拓扑。容易看出，用$C^\infty(\Omega)$代替$C^m(\Omega)$，定理2.1和2.2亦真。于是，$C^\infty(\Omega)$是一个Frechet空间，其拓扑与使得线性映射

$$\partial^\alpha : C^\infty(\Omega) \to C(\Omega), \ \forall \alpha$$

为连续的最弱拓扑相一致，其中空间$C(\Omega)$装备着它的自然拓扑。也可以说，$C^\infty(\Omega)$的拓扑是使得恒等映射$C^\infty(\Omega) \to C^m(\Omega)$对所有$m>0$为连续的最弱拓扑。

下面的定理给出了$C^\infty(\Omega)$内有界集的特征。

定理 2.3. $C^\infty(\Omega)$中的子集A是有界的当且仅当，给定一个整数$m>0$和一紧集$K \subset \Omega$，存在常数$C>0$，使得

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leqslant C, \ \forall |\alpha| \leqslant m, \ \forall x \in K, \ \forall \phi \in A.$$

证明 设集 A 满足条件．为了证明 A 有界，我们必须证明，给定 $C^\infty(\Omega)$ 中 0 点邻域 V，能够找到数 $\lambda>0$ 使得 $\lambda A \subset V$．显然可设邻域 V 是如下的形式：$V=\{\phi \in C^\infty(\Omega): p_{m,j}(\phi) \leqslant \varepsilon\}$．由关于 A 的假设，存在常数 $C>0$，使得

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leqslant C, \ \forall |\alpha| \leqslant m, \ \forall x \in K_j, \ \forall \phi \in A.$$

设 λ 是使 $\lambda C \leqslant \varepsilon$ 的正实数．那么这后一不等式表明

$$\lambda |\partial^\alpha \phi(x)| \leqslant \varepsilon, \ \forall |\alpha| \leqslant m, \ \forall x \in K_j, \ \forall \phi \in A.$$

换句话说，$\lambda A \subset V$，于是 A 在 $C^\infty(\Omega)$ 内有界．作为练习，我们留给读者去证明：若 A 是 $C^\infty(\Omega)$ 内的有界子集，则定理中的条件满足．

$C^\infty(\Omega)$ 的相对紧子集

我们回顾一下：一个拓扑空间中的子集，如果它的闭包是紧的，这一子集就是相对紧的．下面，在 Ascoli 定理的基础上我们将给出 $C^m(\Omega)$ 的相对紧子集的特征，并且作为一个推论，将得出这样一个事实：在 $C^m(\Omega)$ 内，相对紧子集和有界子集是一致的．

定义 2.1. A 是 $C(\Omega)$ 的子集，如果给定 $\varepsilon>0$，存在 $x_0 \in \Omega$ 的邻域 U，使得

$$|\phi(x)-\phi(x_0)| \leqslant \varepsilon, \ \forall x \in U, \ \forall \phi \in A,$$

就称 A 在 x_0 点等度连续．如果 A 在 Ω 的每一点等度连续，就称 A 在 Ω 内等度连续．

下面是 Ascoli 定理的许多说法中的一种(见 [4, 18])．

定理 2.4. (Ascoli) $C(\Omega)$ 的子集 A 是相对紧的当且仅当 (1) A 是等度连续的；(2) 对每一个 $x \in \Omega$，子集 $\{\phi(x): \phi \in A\}$ 在 $\mathbb{C}$ 中是相对紧的．

定理 2.5. $C^m(\Omega)$ 的子集 A 是相对紧的当且仅当 (1) A 在 $C^m(\Omega)$ 内有界；(2) 对每一个 $p=(p_1, \cdots, p_n)$，$|p|=m$，集 $\partial^p A$(A 在微分算子 ∂^p 下的象)等度连续．

定理 2.5 的证明建立在下列结果的基础上．

引理 2.1. 设 B 是 $C^1(\Omega)$ 中的有界子集. 则 B 是 $C(\Omega)$ 的一个等度连续子集.

证明 利用中值定理[7, p. 268]我们有

$$|\phi(x+h)-\phi(x)|\leqslant\sup_{0\leqslant\theta\leqslant1}\|\phi'(x+\theta h)\|\cdot|h|,$$

这里 $h=(h_1, \cdots, h_n)$, ϕ' 表示 ϕ 的微分, 将它看成 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{C}$ 内的一个线性算子, $\|\phi'\|$表示它的范数.

因 B 在 $C^1(\Omega)$ 内有界, 容易知道存在常数 $M>0$ 使得

$$\sup_{0\leqslant\theta\leqslant1}\|\phi'(x+\theta h)\|\leqslant M, \quad \forall\phi\in B.$$

代入上式, 得

$$|\phi(x+h)-\phi(x)|\leqslant M\cdot|h|, \quad \forall\phi\in B.$$

于是 B 是等度连续的. 证毕.

定理 2.5 的证明 设 A 是 $C^m(\Omega)$ 的相对紧子集. 则 A 是 $C^m(\Omega)$ 的有界子集(第1章, 第5节, 例3). 另一方面, 由 Ascoli 定理得: 对每个 $|p|=m$, $\partial^p A$ 等度连续.

反过来, 假定条件(1)和(2)成立. 设 $p=(p_1, \cdots, p_n)$, $|p|=m$, 考虑集 $\partial^p A$. 由假设, $\partial^p A$ 是有界的且等度连续; 于是, 由 Ascoli 定理, $\partial^p A$ 是相对紧集. 现在令 $q=(q_1, \cdots, q_n)$且使 $|q|=m-1$, 又设 $B=\partial^q A$. 显然 B 是 $C^1(\Omega)$ 的有界子集; 于是, 由引理 2.1, B 是等度连续的. 再由 Ascoli 定理, $B=\partial^q A$ 是相对紧集. 利用归纳法可得, 对所有 $|p|\leqslant m$, $\partial^p A$ 是 $C(\Omega)$ 的相对紧子集. 于是由定理 2.4, A 是 $C^m(\Omega)$的相对紧子集. 证毕.

系 $C^{m+1}(\Omega)$的每个有界子集 A 在 $C^m(\Omega)$中是相对紧的.

证明 只要应用引理和前面的定理就可以了. 证毕.

作为上述结果的一个推论, 有下面的定理.

定理 2.6. $C^\infty(\Omega)$ 的子集 A 是相对紧的当且仅当 A 在 $C^\infty(\Omega)$内有界.

按照 Grothendieck [12], 我们建立如下定义.

定义 2.2. 一个 Hausdorff 局部凸空间 E, 如果它的每一个有界子集都是相对紧的, 就称这一空间是 Montel 空间.

空间 $C^\infty(\Omega)$ 装备了自然拓扑就是一个 Montel 空间. 这里,我们要指出,上述定义和 Bourbaki[6], Horvath[17], 或 Treves[32] 的不同. 然而,在这里所定义的所有局部凸空间内,这两个定义是一致的.

每一个 Montel 空间是一个自反空间 [6, 17]. 于是, $C^\infty(\Omega)$ 是一个自反空间.

Montel 空间的诱导极限仍旧是 Montel 空间. 事实上, 设 E 是序列 $(E_i)_{i=1,2,\cdots}$ 的诱导极限 (第 1 章, 第 6 节), 并设 E_i 是 Montel 空间. 令 A 是 E 内的一个有界集. 由定理 1.3, 存在指标 i_0 使得 $A\subset E_{i_0}$ 并且 A 在 E_{i_0} 内有界. 因为 M_i 是 Montel 空间, 故 A 在 E_{i_0} 内是相对紧的, 又因 E_{i_0} 到 E 内的恒等映射是连续的, 故 A 在 E 内也相对紧; 于是, 由定义 2.2, E 是 Montel 空间.

2. $C_C^\infty(\Omega)$ 的拓扑

设 K 是 Ω 的紧子集, 并记 $C_C^\infty(\Omega;\ K)$ 是 $C_C^\infty(\Omega)$ 的子空间, 它包含着支柱在 K 内的所有函数. 在 $C_C^\infty(\Omega;\ K)$ 上我们考虑由 $C^\infty(\Omega)$ 导出的拓扑, 它与由一列半范

$$p_m(\phi)=\sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq m}}|\partial^\alpha\phi(x)|,\ m\in\mathbb{N},$$

所定义的局部凸拓扑是一致的.

定理 2.7. $C_C^\infty(\Omega;\ K)$ 是 Frechet 空间.

证明 因为 $C_C^\infty(\Omega;\ K)$ 的拓扑是由一列半范所定义的, 所以 $C_C^\infty(\Omega;\ K)$ 是一个可距离化的空间. 为了证明 $C_C^\infty(\Omega;\ K)$ 是完备的, 只要去证明 $C_C^\infty(\Omega;\ K)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 的一个闭子空间, 而这是明显的. 证毕.

定理 2.8. 设 K 和 L 是两个紧子集, $K\subset L\subset\Omega$. 我们有: (1) 恒等映射 $C_C^\infty(\Omega;\ K)\to C_C^\infty(\Omega;\ L)$ 是连续的; (2) $C_C^\infty(\Omega;\ K)$ 是 $C_C^\infty(\Omega;\ L)$ 的一个闭子空间.

其证明留给读者作为练习.

现在假设(K_j)是一列增加的紧集，使得$K_j\subset\Omega$并且K_j之和为Ω. 显然

$$C_C^\infty(\Omega)=\bigcup_j C_C^\infty(\Omega;\ K_j).$$

由定理 2.7 和 2.8 看出，Frechet 空间$C_C^\infty(\Omega;\ K_j)$的序列满足定理 1.3 的所有假设. 于是在$C_C^\infty(\Omega)$上定义着空间$C_C^\infty(\Omega;K_j)$的诱导极限拓扑. 作为定理 1.3 的一个推论，这就得出在每一个子空间$C_C^\infty(\Omega;\ K_j)$上，由诱导极限所导出的拓扑与由$C^\infty(\Omega)$所导出的拓扑一致. 我们还可证明，如果将序列(K_j)换成另外的具有相同性质的紧子集序列，则$C_C^\infty(\Omega)$的诱导极限拓扑保持不变.

同样由定理 1.3, 为了使得子集A在$C_C^\infty(\Omega)$内是有界的，其充要条件是存在一个指标j, 使得A含在$C_C^\infty(\Omega;\ K_j)$内并在$C_C^\infty(\Omega;\ K_j)$内有界. 等价地说就是，集A在$C_C^\infty(\Omega)$内有界当且仅当存在紧子集$K\subset\Omega$使得：(i) 每个$\phi\in A$的支柱含在K内；(ii) 对每个$\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$，对应着一个常数$C_\alpha$使下式成立：

$$|\partial^\alpha\phi(x)|\leqslant C_\alpha,\ \forall x\in K,\ \forall\phi\in A.$$

我们有下列收敛的判别准则.

定理 2.9. 序列(ϕ_k)在$C_C^\infty(\Omega)$内收敛于 0 当且仅当我们能找到一个紧子集$K\subset\Omega$使得：(1) 每个函数ϕ_k的支柱皆含在K内；(2) 对每个α，序列$(\partial^\alpha\phi_k)$在K上一致收敛于 0.

证明 设当$k\to\infty$时$\phi_k\to 0$，则序列(ϕ_k)是$C_C^\infty(\Omega)$的一个有界子集. 由定理 1.3, 存在一个紧子集$K\subset\Omega$使得对所有k，$\phi_k\in C_C^\infty(\Omega;K)$. 另一方面，因为$C_C^\infty(\Omega;K)$的拓扑与由$C_C^\infty(\Omega)$的导出拓扑相一致，这就得出在$C_C^\infty(\Omega;\ K)$内$\phi_k\to 0$.

反过来，(1)与(2)合起来推得在$C_C^\infty(\Omega;\ K)$内$\phi_k\to 0$. 因为恒等映射$C_C^\infty(\Omega;\ K_j)\to C_C^\infty(\Omega)$是连续的，因而所给序列在$C_C^\infty(\Omega)$内收敛. 证毕.

定理 2.10. 恒等映射$C_C^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$是连续的.

证明 按定义，对每个j，嵌入$C_C^\infty(\Omega;\ K_j)\to C^\infty(\Omega)$是连续的. 再由命题 1.1 就得出恒等映射$C_C^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$的连续性. 证

毕.

作为定理 2.10 的一个推论，可知 $C_C^\infty(\Omega)$ 的每一个有界子集都是 $C^\infty(\Omega)$ 的有界子集.

定理 2.11. $C_C^\infty(\Omega)$ 是一个 Montel 空间.

证明 事实上, $C_C^\infty(\Omega)$ 是 Montel 空间序列的诱导极限. 证毕.

作为一个推论,有下列结果.

系 $C_C^\infty(\Omega)$ 是一个自反空间.

我们还要指出 $C_C^\infty(\Omega)$ 是一个完备的空间. 因 $C_C^\infty(\Omega)$ 是不可距离化的空间, 故需证明 $C_C^\infty(\Omega)$ 中的每个 Cauchy 滤子在 $C_C^\infty(\Omega)$ 内收敛. 这里我们将不去证明这一结果. 读者可参阅例如 Horvath[17, p. 162～165],在那儿讨论了一般的情形.

然而, 容易看出 $C_C^\infty(\Omega)$ 是序列完备的. 事实上, 若 (ϕ_j) 是 $C_C^\infty(\Omega)$ 内的 Cauchy 序列, 它是有界的; 于是, 由定理 1.3, 它是某一空间 $C_C^\infty(\Omega;\ K)$ 中的 Cauchy 序列; 由于这一空间是完备的 (定理 2.7), 于是该序列在 $C_C^\infty(\Omega;\ K)$ 内收敛. 从而 (ϕ_j) 在 $C_C^\infty(\Omega)$ 内收敛.

补　充

设 $C_C^m(\Omega)$ 是紧支柱在 Ω 内的所有 C^m 函数组成的空间, 又设 $C_C^m(\Omega;\ K)$ 是 $C^m(\Omega)$ 的子空间, 它包含着紧支柱在 Ω 的紧子集 K 内的所有函数. 在 $C_C^m(\Omega;\ K)$ 上, 我们定义的拓扑是由 $C^m(\Omega)$ 导出的, 它与由范数

$$p_m(\phi) = \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leqslant m}} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

所定义的拓扑是一致的. 容易验证 $C_C^m(\Omega;\ K)$ 是一个 Banach 空间.

如同空间 $C_C^\infty(\Omega)$ 的情形那样, 在 $C_C^m(\Omega)$ 上定义诱导极限拓扑, 它是由一列子空间 $C_C^m(\Omega;\ K_j)$ 所产生的, 其中 (K_j) 是 Ω 的一列增加的紧子集, 并且其和是 Ω. 空间 $C_C^m(\Omega)$ 的收敛序列和有界

集的特征都与 $C_C^\infty(\Omega)$ 的情形相仿. 但 $C_C^m(\Omega)$ 不是自反空间.

容易看出对所有 $m\geqslant 0$, 嵌入 $C_C^\infty(\Omega)\to C_C^m(\Omega)$ 是连续的. 于是我们能够在 $C_C^\infty(\Omega)$ 上定义使得上述嵌入都连续的最弱的拓扑, 由于后面将出现的一些理由, 我们把装备着这一拓扑的空间 $C_C^\infty(\Omega)$记为 $D_F(\Omega)$. 在第 7 节中将会看到, $C_C^\infty(\Omega)$ 的自然拓扑严格强于 $D_F(\Omega)$ 的拓扑.

3. 广 义 函 数

定义 2.3. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集. $C_C^\infty(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函就是 Ω 上的一个*广义函数*.

Ω 上所有广义函数所组成的向量空间记为 $D'(\Omega)$. 它是 $C_C^\infty(\Omega)$的拓扑对偶.

例 1. 设 f 是 Ω 上的局部可积函数. 由

$$T_f(\phi)=\int_\Omega f\cdot\phi,\ \forall\phi\in C_C^\infty(\Omega)$$

定义的线性泛函

$$T_f:C_C^\infty(\Omega)\to\mathbb{C}.$$

正如我们所知, T_f 确定了 Ω 上的一个 Radon 测度, 即, $C_0(\Omega)$上的一个连续线性泛函. 另一方面, 嵌入

$$C_C^\infty(\Omega)\to C_0(\Omega)$$

是连续的, 于是 T_f 定义了 $C_C^\infty(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函, 即, Ω 上的一个广义函数. 在不致于混淆时, 我们将记 T_f 为 f.

特别, $C^m(\Omega)$ 的函数, $0\leqslant m\leqslant+\infty$, L^p 函数, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, 确定了 Ω 上的广义函数.

2. 更一般地, Ω 上的每一个 Randon 测度 μ 确定 Ω 上的一个广义函数. 此外, 可把 $M(\Omega)$ 看成 $D'(\Omega)$ 的一个子空间:

$$M(\Omega)\subset D'(\Omega).$$

事实上, 只要去证明若 $\mu\in M(\Omega)$ 并且

$$\mu(\phi)=0,\ \forall\phi\in C_C^\infty(\Omega),$$

则 μ 是恒为 0 的 Radon 测度,即, $\mu(\psi)=0$, $\forall\psi\in C_c(\Omega)$. 若 ψ 是 $C_c(\Omega)$ 的一个元素,那么由定理 1.1,

$$\psi_\varepsilon=\alpha_\varepsilon*\psi$$

是 $C_C^\infty(\Omega)$ 的一个元素, 并且容易看出当 $\varepsilon\to 0$ 时, 在 $C_c(\Omega)$ 内 $\psi_\varepsilon\to\psi$. 于是,由连续性, $\mu(\psi)=0$. 证毕.

3. $\mathbb{R}^n$ 上的 Dirac 测度 δ, 它由

$$\delta(\phi)=\phi(0),\ \forall\phi\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

所定义,是一个广义函数.

4. 下面给出一个广义函数但非测度的例子. 设 $\Omega=\mathbb{R}$, 定义

$$\delta'(\phi)=\delta\left(-\frac{d\phi}{dx}\right)=-\frac{d\phi}{dx}(0),\quad \forall\phi\in C_C^\infty(\mathbb{R}).$$

显然 δ' 定义了 $C_C^\infty(\mathbb{R})$ 上的一个连续线性泛函 (甚至是在 $C_C^1(\mathbb{R})$ 上)但不在 $C_C^0(\mathbb{R})$ 上. 这个例子可推广到多变量的情形. 设 $\Omega=\mathbb{R}^n$ 并假定对所有的 $\phi\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle\partial_k\delta,\ \phi\rangle=-\langle\delta,\ \partial_k\phi\rangle=-\partial_k\phi(0),$$

其中 $1\leqslant k\leqslant n$. 后面将会看到, $\partial_k\delta$ 正好就是 Dirac 测度在广义函数意义下的偏导数.

5. 单变量的函数 $\frac{1}{x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上非局部可积,因此在例 1 的意义下它并不确定 $\mathbb{R}$ 上的广义函数. 按定义,我们令

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{PV}\frac{1}{x},\ \phi\right\rangle&=\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx,\quad \forall\phi\in C_C^\infty(\mathbb{R}),\end{aligned}$$

这里右端的极限称为积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi(x)/x)dx$ 的 Cauchy 主值. 我们有

$$\begin{aligned}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx&=\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx\\&=\phi(-\varepsilon)\ln\varepsilon-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\phi'(x)\ln|x|dx-\phi(\varepsilon)\ln\varepsilon\\&\quad-\int_{\varepsilon}^{+\infty}\phi'(x)\ln|x|dx,\end{aligned}$$

记 $\phi(x)=\phi(0)+x\psi(x)$ 以及 $\psi(0)=\phi'(0)$，代入上式，得

$$\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,dx=-\varepsilon(\psi(-\varepsilon)+\psi(\varepsilon))\ln\varepsilon-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\phi'(x)\ln|x|\,dx$$

$$-\int_{\varepsilon}^{+\infty}\phi'(x)\ln|x|\,dx.$$

取极限，得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'(x)\ln|x|\,dx,$$

其中后一积分收敛，并且定义出 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 上的连续线性泛函. 于是,

$$\left\langle \mathrm{PV}\frac{1}{x},\ \phi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'(x)\ln|x|\,dx$$

定义了 $\mathbb{R}$ 上的一个广义函数.

由定义 2.3 和命题 1.1 知道，T 是 Ω 上的一个广义函数当且仅当对每一个含在 Ω 内的紧子集 K，T 是 $C_c^\infty(\Omega;\ K)$ 上的连续线性泛函. 换句话说，下列定理成立.

定理 2.12. 一个线性泛函 T 是 Ω 上的广义函数当且仅当对每个紧集 $K\subset\Omega$，存在常数 $C>0$ 和整数 $m\geq0$，使得

$$|\langle T,\ \phi\rangle|\leq C\cdot\sup_{\substack{x\in\Omega\\|\alpha|\leq m}}|\partial^\alpha\phi(x)|,\ \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega;\ K). \tag{2.1}$$

证明 设 $T\in D'(\Omega)$. 上面曾说过，对每个紧子集 $K\subset\Omega$，T 是 $C_c^\infty(\Omega;\ K)$ 上的连续线性泛函. 于是，存在 0 点的邻域

$$V=V(K,\ m,\ \varepsilon)=\{\phi\in C_c^\infty(\Omega;\ K):p_{m,k}(\phi)\leq\varepsilon\},$$

这里

$$p_{m,k}(\phi)=\sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\leq m}}|\partial^\alpha\phi(x)|,$$

使得

$$|\langle T,\ \phi\rangle|\leq1,\ \forall\phi\in V.$$

另一方面，若 $\phi\in C_c^\infty(\Omega;\ K)$ 使得 $\phi\neq0$，则有

$$\frac{\varepsilon\phi}{p_{m,k}(\phi)}\in V.$$

这就得到

$$|\langle T,\ \phi\rangle|<\frac{1}{\varepsilon}p_{m,k}(\phi),\ \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega;\ K),\ \phi\neq0.$$

取 $C=\varepsilon^{-1}$，便得到 (2.1) 对所有 $\phi\in C_c^\infty(\Omega;\ K)$，$\phi\neq0$ 成立. 最后，当 $\phi=0$ 时 (2.1) 是一个等式.

反过来，若 (2.1) 成立，它意味着对任何 $j=1, 2, \cdots$，T 是 $C_C^\infty(\Omega;\ K_j)$ 上的连续线性泛函．于是(命题 1.1) T 是 $C_C^\infty(\Omega)$ 上的连续线性泛函．证毕．

我们要指出条件 (2.1) 不是一个容易验证的条件．当证明一个线性泛函 T 是否为一个广义函数时，我们时常应用广义函数的下列特征，它是用 $C_C^\infty(\Omega)$ 中收敛序列来表述的．

定理 2.13. $T\in D'(\Omega)$ 当且仅当对 $C_C^\infty(\Omega)$ 中每一个收敛于 0 的序列 (ϕ_k)，数列 $(\langle T, \phi_k\rangle)$ 收敛于 0．

证明 设 $T\in D'(\Omega)$，又设 (ϕ_k) 是在 $C_C^\infty(\Omega)$ 内收敛于 0 的一个序列．由定理 2.9，存在紧子集 $K\subset\Omega$ 使得

$$\phi_k\in C_C^\infty(\Omega;\ K),\ \forall k,$$

和

$$\phi_k\to 0 \text{ 在 } C_C^\infty(\Omega;\ K)．$$

因 T 在 $C_C^\infty(\Omega;\ K)$ 上连续(命题 1.1)，于是 $k\to+\infty$ 时

$$\langle T,\ \phi_k\rangle\to 0．$$

反过来，假设满足这一条件．为了证明 $C_C^\infty(\Omega)$ 上的线性泛函 T 是连续的，只要证明 T 在每一个子空间

$$C_C^\infty(\Omega;\ K_j),\ j=1,\ 2,\ \cdots$$

上是连续的 (命题 1.1)．利用反证法，我们假设存在某一个指标 j_0 使得 T 在 $C_C^\infty(\Omega;\ K_{j_0})$ 上不连续，那末就能找出 $C_C^\infty(\Omega;\ K_{j_0})$ 的一个函数序列 (ϕ_k) 在 $C_C^\infty(\Omega;\ K_{j_0})$ 内收敛于 0，而数列 $(\langle T, \phi_k\rangle)$ 不收敛．因为嵌入

$$C_C^\infty(\Omega;\ K_{j_0})\to C_C^\infty(\Omega)$$

是连续的，(ϕ_k) 必在 $C_C^\infty(\Omega)$ 内收敛于 0，于是 $(\langle T, \phi_k\rangle)$ 必收敛于 0，这是矛盾的．证毕．

$D'(\Omega)$ 上的拓扑

在 $D'(\Omega)$ 上建立的与向量空间结构相容的种种拓扑之中，最重要的是弱拓扑和强拓扑．在第 1 章第 5 节里，我们曾经在拓扑向量空间的一般情形下讨论过这种拓扑的概念．由这一讨论得出，$D'(\Omega)$ 上的弱拓扑是局部凸拓扑，它是由与 $C_C^\infty(\Omega)$ 中元素相

联系的一族半范

$$p_\phi(T)=|\langle T,\ \phi\rangle|$$

所定义的，其中 $\phi\in C_C^\infty(\Omega)$ 以及 $T\in D'(\Omega)$. 我们有下列广义函数序列收敛性的判别准则：

$D'(\Omega)$的元素序列(T_j)弱收敛于 0 当且仅当对每个 $\phi\in C_C^\infty(\Omega)$，数列$(\langle T_j,\ \phi\rangle)$收敛于 0.

对滤子也有相仿的收敛判别准则. 这一弱拓扑也称为 $C_C^\infty(\Omega)$ 内的点态收敛拓扑.

另外，$D'(\Omega)$ 上的强拓扑是局部凸拓扑，它是由与 $C_C^\infty(\Omega)$ 的有界集之极集相联系的一族半范所定义的(第 1 章，第 5 节). 我们有下列收敛判别准则.

$D'(\Omega)$ 的元素序列(T_j)强收敛于 0 当且仅当数列$(\langle T_j,\ \phi\rangle)$在 $C_C^\infty(\Omega)$的每一个有界集上一致收敛于 0.

可以证明对广义函数的滤子也有相仿的收敛判别准则. $D'(\Omega)$ 上的强拓扑是在 $C_C^\infty(\Omega)$ 的有界集上一致收敛的拓扑. 很明显，强收敛蕴含着弱收敛.

$C^\infty(\Omega)$ 的对偶

记 $E'(\Omega)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 的拓扑对偶，其中 $C^\infty(\Omega)$ 装备着自然拓扑. 因为，由定理 2.10，恒等映射 $C_C^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$ 是连续的，所以 $E'(\Omega)$ 的每个元素 T 都定义 Ω 上的一个广义函数. 在后面我们将会看到，$E'(\Omega)$的元素都是 Ω 上具有紧支柱的广义函数.

定理 2.14. $T\in E'(\Omega)$ 当且仅当存在一个常数 $C>0$，整数 $m\geqslant 0$，以及一个紧集 $K\subset\Omega$，使得

$$|\langle T,\ \phi\rangle|\leqslant C\cdot\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ x\in K}}|\partial^\alpha\phi(x)|,\quad \forall\phi\in C^\infty(\Omega). \tag{2.2}$$

证明 若 $T\in E'(\Omega)$，存在 $C^\infty(\Omega)$ 内 0 点的一个邻域

$$V=\{\phi\in C^\infty(\Omega): p_{m,k}(\phi)\leqslant\varepsilon\},$$

使得

$$|\langle T,\ \phi\rangle|\leqslant 1,\quad \forall\phi\in V. \tag{2.3}$$

设 $\phi\in C^\infty(\Omega)$ 并且 $p_{m,k}(\phi)\neq 0$, 那么 $\varepsilon\phi/p_{m,k}(\phi)\in V$; 于是

$$|\langle T,\ \phi\rangle|\leqslant C\cdot p_{m,k}(\phi),$$

这里 $C=\varepsilon^{-1}$. 其次, 若 $\phi\in C^\infty(\Omega)$ 并且 $p_{m,k}(\phi)=0$, 我们要求 $\langle T,\ \phi\rangle=0$. 事实上, 此 ϕ 属于 V, 并且任何数 λ 与 ϕ 的乘积 $\lambda\phi$ 亦如此. 如果 $\langle T,\ \phi\rangle$ 异于 0, 则 $|\langle T,\ \lambda\phi\rangle|$ 将会变得充分大, 这与(2.3)矛盾. 这样一来, (2.2)对所有 $\phi\in C^\infty(\Omega)$ 成立. 我们留给读者去证明: 若(2.2)成立, 则 T 定义 $C^\infty(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函. 证毕.

$E'(\Omega)$ 上的拓扑

如同 $D'(\Omega)$ 的情形, 我们只考虑 $E'(\Omega)$ 上的弱拓扑和强拓扑. 关于 $E'(\Omega)$ 上的强拓扑, 我们证明下列定理.

定理 2.15. $E'(\Omega)$ 中的序列 (T_j) 强收敛于零当且仅当, 在 $C^\infty(\Omega)$ 的有界集上, 数列 $(\langle T_j,\ \phi\rangle)$ 一致收敛于零.

证明 设 $E'(\Omega)$ 中的序列 (T_j) 强收敛于零. 令 A 是 $C^\infty(\Omega)$ 的一个有界子集, 并设 $\varepsilon>0$ 是给定的数. 集

$$\begin{aligned} V=V(A,\ \varepsilon)&=\{T\in E'(\Omega):|p_{A^\circ}(T)|\leqslant\varepsilon\}\\ &=\{T\in E'(\Omega):|\langle T,\ \phi\rangle|\leqslant\varepsilon,\ \forall\phi\in A\}\end{aligned}$$

是 $E'(\Omega)$ 的强拓扑中的 0 点邻域 (第 1 章, 第 5 节). 因为, 按假设, (T_j) 在 $E'(\Omega)$ 内收敛于 0, 故存在一个指标 j_0 使得 $T_j\in V$, $j\geqslant j_0$, 即

$$|\langle T_j,\ \phi\rangle|\leqslant\varepsilon,\ \forall j\geqslant j_0,\ \forall\phi\in A,$$

这就证明了我们的断言.

反过来, 容易看出, 在 $E'(\Omega)$ 的强拓扑中, 0 点的每一个邻域必定包含着下述形式的 0 点邻域:

$$\begin{aligned} V(A_1,\ \cdots,\ A_k;\ \varepsilon)=\{T\in E'(\Omega):|\langle T,\ \phi\rangle|\\ \leqslant\varepsilon,\ \forall\phi\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\},\end{aligned}$$

其中 $A_1,\ \cdots,\ A_k$ 都是 $C^\infty(\Omega)$ 内的有界集. 令 $A=A_1\cup\cdots\cup A_k$. 集 A 是有界的, 因为由假设, $\langle T_j,\ \phi\rangle\to 0$ 对 $\phi\in A$ 是一致的, 所以我们能找到指标 j_0, 使得

$$|\langle T_j, \phi\rangle| \leqslant \varepsilon, \ j \geqslant j_0, \ \forall \phi \in A.$$

这显然表明 $T_j \in V(A_1, \cdots, A_k; \varepsilon), \ \forall j \geqslant j_0,$

这就证明了 $T_j \to 0$ 是强的. 证毕.

例 1. 每一个有紧支柱的局部可积函数 f, 由

$$\langle f, \phi\rangle = \int_\Omega f \cdot \phi, \ \forall \phi \in C^\infty(\Omega)$$

定义 $C^\infty(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函. 为证明其连续性,只要证明映射

$$\phi \to \langle f, \phi\rangle$$

已经在 $C(\Omega)$ 上连续就可以了.

若 K 是 Ω 的一个紧子集, 又若 $L^1_K(\Omega)$ 表示紧支柱在 K 内的所有可积函数组成的空间,那么能够证明

$$L^1_K(\Omega) \subset E'(\Omega).$$

特别, $C^m_C(\Omega)$ $(m \geqslant 0)$ 都是 $E'(\Omega)$ 的子空间.

2. 更一般地, $C'(\Omega)$ 的每个元素定义 $C(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函. 并且,可以把 $C'(\Omega)$ 看作 $E'(\Omega)$ 的子空间. 事实上,这只要证明

$$C^\infty(\Omega) \subset C(\Omega)$$

具有连续的嵌入且 $C^\infty(\Omega)$ 在 $C(\Omega)$ 内稠密即可.

3. 广义函数 δ 和 δ' 属于 $E'(\mathbb{R}^n)$.

4. 广义函数的支柱

定义 2.4. 设 V 是 Ω 的一个开子集, $T \in D'(\Omega)$. 若

$$\langle T, \phi\rangle = 0, \ \forall \phi \in C^\infty_C(V),$$

我们就称广义函数 T 在 V 上是零.

例 1. 设 $\Omega = \mathbb{R}$, 考察 Heaviside 函数

$$Y(x) = \begin{cases} 1, & 若 \ x \geqslant 0, \\ 0, & 若 \ x < 0. \end{cases}$$

因为 Y 是局部可积函数,所以由

$$\langle Y, \phi\rangle = \int_0^{+\infty} \phi, \ \forall \phi \in C_C^\infty(\mathbb{R})$$

定义 $\mathbb{R}$ 上的一个广义函数. 不难看出这一广义函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上是零. 更一般地，若函数 f 在某个开集内是零，那么由它所确定的广义函数在同一开集内也是零.

2. Dirac 测度 δ 以及它的导数 $\partial_k\delta$, $1\leqslant k\leqslant n$, 在 $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 上都等于零.

定义 2.5. 我们称两个广义函数 $S, T\in D'(\Omega)$ 在 Ω 的某个开子集 V 上是相等的，如果 $S-T$ 在 V 上等于 0. 记为

$$S=T \text{ 在 } V \text{ 上}.$$

引理 2.2. 设 $(V_i)_{i\in I}$ 是 Ω 的一族开子集，又设 $T\in D'(\Omega)$ 在每个 V_i 上为 0. 则 T 在和集

$$V=\bigcup_{i\in I} V_i$$

上为 0.

证明 设 $\phi\in C_C^\infty(V)$，并记 K 是 ϕ 的支柱. 因为 $(V_i)_{i\in I}$ 是紧子集 K 的一个开覆盖，我们能够选取 K 的有限个子覆盖 $V_{i_1}, \cdots, V_{i_r}$. 设 $(\psi_j)_{1\leqslant j\leqslant r}$ 是从属于这一覆盖的单位 C^∞ 分解(定理 1.1, 系 4). 我们有

$$\psi_j\in C_C^\infty(V_{i_j}), \ 0\leqslant\psi_j\leqslant 1, \ \sum_{j=1}^{r}\psi_j=1;$$

于是

$$\phi=\sum_{j=1}^{r}\phi\cdot\psi_j.$$

因为 $\phi\cdot\psi_j\in C_C^\infty(V_{i_j})$ 以及 T 在 V_{i_j} 上为 0, 所以

$$T(\phi)=\sum_{j=1}^{r}T(\phi\cdot\psi_j)=0.$$

而 ϕ 是 $C_C^\infty(V)$ 的任意一个元素，这就证明了 T 在 V 上为 0. 证毕.

定义 2.6. 设 $T\in D'(\Omega)$. T 的支柱是 Ω 的最大开子集在 Ω 内的余集，而在这个开子集上 T 为 0. 我们把它记为 supp T.

等价地，一个点属于 T 的支柱，当且仅当不存在该点的开邻域使得 T 在此开邻域上为 0. 也可以这么说，T 的支柱是 Ω 的最

小的闭子集，在这个闭子集之外广义函数 T 为 0。

作为习题，读者可以证明下列结果：

1．若 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$，$T\in D'(\Omega)$ 并且

$$\operatorname{supp}\phi\cap\operatorname{supp}T=\phi,$$

那么

$$\langle T,\ \phi\rangle=0.$$

2．设 $T\in D'(\Omega)$．T 的支柱是 Ω 的最小闭子集 F，使得若 $\phi,\ \psi\in C_c^\infty(\Omega)$，并且在 F 的某个邻域上 $\phi=\psi$，则

$$\langle T,\ \phi\rangle=\langle T,\ \psi\rangle.$$

下面的定理建立了两个广义函数空间 $E'(\Omega)$ 和 $D'(\Omega)$ 之间的关系．

定理 2.16． 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 内的开集．我们有：(1) $E'(\Omega)\subset D'(\Omega)$ 并且恒等映射关于强拓扑是连续的；(2) $E'(\Omega)$ 的元素都是在 Ω 内有紧支柱的广义函数．

证明 (i) 我们首先证明 $C_c^\infty(\Omega)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 的一个稠密子空间．事实上，设 (K_j) 是含在 Ω 内的一列增加的紧子集，并且它们的和集是 Ω，又设 (β_j) 是一列 C^∞ 的函数序列，在 K_j 的某个邻域上 $\beta_j=1$．若 $\phi\in C^\infty(\Omega)$，令 $\phi_j=\beta_j\phi\in C_c^\infty(\Omega)$．容易证明在 $C^\infty(\Omega)$ 内

$$\phi_j\to\phi.$$

(ii) 设 $T\in E'(\Omega)$．我们已经知道（定理 2.10），恒等映射 $C_c^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$ 是连续的，于是 T 定义 Ω 上的一个广义函数．

另一方面，为了证明 $E'(\Omega)$ 是 $D'(\Omega)$ 的子空间，只要证明，如果 $T\in E'(\Omega)$ 并且 $\langle T,\ \phi\rangle=0$ 对所有的 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$ 成立，那么 T 是恒为 0 的广义函数．但这由 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 内稠密立即得出．

设 $E'(\Omega)$ 和 $D'(\Omega)$ 装备着各自的强拓扑，要证明 $E'(\Omega)$ 到 $D'(\Omega)$ 内的恒等映射是连续的，只要再次注意到嵌入 $C_c^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$ 是连续的；于是 $C_c^\infty(\Omega)$ 的每个有界集是 $C^\infty(\Omega)$ 的有界集．

(iii) 最后，我们证明每个 $T\in E'(\Omega)$ 在 Ω 内有紧支柱．在定理 2.14 的证明中，曾经看到若 $T\in E'(\Omega)$，则存在数 $s>0$，整数

$m>0$ 以及 Ω 的一个紧子集 K，使得对所有满足

$$p_{m,k}(\phi)\leqslant\varepsilon$$

的 $\phi\in C^\infty(\Omega)$，有

$$|\langle T,\ \phi\rangle|\leqslant 1.$$

我们还曾讲到对所有满足 $p_{m,k}(\phi)=0$ 的 $\phi\in C^\infty(\Omega)$ 有 $\langle T,\ \phi\rangle=0$. 因为任何 $\psi\in C_c^\infty(\Omega-K)$ 显然是满足上述条件的，这就推得 T 在 $\Omega-K$ 上必为 0；于是 T 的支柱必定含在 K 内. 证毕.

例 1. Dirac 测度有等于 $\{0\}$ 的紧支柱.

2. $C^1(\Omega)$ 的元素都是 Radon 测度(因而是广义函数)在 Ω 内有紧支柱.(见第 1 章习题 29 和 31.)

5. 广义函数的导数

定义 2.7. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集，又设 T 是 $D'(\Omega)$ 的一个元素. T 关于变量 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的偏导数是由公式

$$\left\langle\frac{\partial T}{\partial x_k},\ \phi\right\rangle=-\left\langle T,\ \frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right\rangle,\quad\forall\phi\in C_c^\infty(\Omega)\qquad(2.4)$$

所定义的广义函数 $\partial T/\partial x_k$.

下面说明这一定义的合理性. 设 f 是 Ω 上的 C^1 类函数. 则 f 和它的所有偏导数 $\partial_k f$ 确定 Ω 上的广义函数. 分部积分表明

$$\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\phi dx=-\int_\Omega f\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_k}dx,\ \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega),$$

这与 $T=f$ 时的(2.4)是一致的. 此外，上述公式表明当 f 是可微函数时，在广义函数意义下 f 的导数（即由(2.4)所定义的）总是和 f 的古典导数相一致的.

设 $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$ 是非负整数的一个 n 元数组，并设 T 是 $D'(\Omega)$ 的一个元素. 由归纳法，我们定义 $\partial^\alpha T$ 如下：

$$\langle\partial^\alpha T,\ \phi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle T,\ \partial^\alpha\phi\rangle,\quad\forall\phi\in C_c^\infty(\Omega).\qquad(2.5)$$

若广义函数 T 是由 Ω 上的 C^m 函数所确定的，那么分部积分法表明，在广义函数意义下 f 的 $|\alpha|$ $(\leqslant m)$ 阶导数与古典意义下对

应的 f 的导数是一致的.

我们列出广义函数的导数的一些十分有用的性质:

1. 广义函数意义下的微分,是一个在 $D'(\Omega)$上处处有定义的算子.

2. 每个广义函数有任意阶的导数.

3. 对每个 $T\in D'(\Omega)$, 我们有

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k}=\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j}, \quad 1\leqslant j,\ k\leqslant n.$$

这一结果表明, 我们可以交换广义函数的求导次序. 但对函数的古典导数,正如我们已经知道的,这一结果一般是不成立的.

4. 映射

$$\partial_k: D'(\Omega)\to D'(\Omega), \quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

在强拓扑的意义上是一个连续线性算子.

事实上,容易看出映射

$$\partial_k: C_C^\infty(\Omega)\to C_C^\infty(\Omega)$$

是一个连续线性映射; 于是, 它将有界集映射为有界集. 这时, 在强拓扑下从 $D'(\Omega)$ 到 $D'(\Omega)$ 内的映射 ∂_k 的连续性由下面的结果即可获得: 若 A 是 $C_C^\infty(\Omega)$的一个有界子集, 又若 B 是 A 在 ∂_k 的作用下的象, 则极集 $B^\circ\subset D'(\Omega)$ 在 ∂_k 作用下的象必含在 A° 内. 我们把它的证明留给读者.

例 1. 前已指出, 每个 $C^1(\Omega)$ 的函数确定 Ω 上的一个广义函数,它在古典意义下的一阶偏导数,与在广义函数意义下相应的偏导数是一致的.

2. 函数 $\log|x|$ 在 $\mathbb{R}^n$ 内是局部可积的, 于是它确定一个广义函数,其导数按定义是

$$\left\langle \frac{d}{dx}\log|x|,\ \phi\right\rangle=-\int_{-\infty}^{+\infty}(\log|x|)\phi'(x)dx,\ \forall\phi\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

于是 $(d/dx)\log|x|=P\cdot V\cdot(1/x)$ (见第 33 页例 5).

3. 设 $\Omega=\mathbb{R}$, 考虑 Heaviside 函数

$$Y(x)=\begin{cases}1, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x<0.\end{cases}$$

在广义函数的意义下，它的导数由下式定义：

$$\left\langle \frac{dY}{dx},\ \phi\right\rangle=-\left\langle Y,\ \frac{d\phi}{dx}\right\rangle$$

$$=-\int_0^{\infty}\frac{d\phi}{dx}=\phi(0)=\langle\delta,\ \phi\rangle,\ \forall\phi\in C_C^{\infty}(\mathbb{R}).$$

所以 $$Y'=\delta,$$

它是 Dirac 测度.

Heaviside 函数 $Y(x)$ 在原点是不连续的，在这个不连续点上的"跳跃度"等于 1. 于是，我们可以说，它在广义函数意义下的导数是 Dirac 测度 δ 与它在原点的"跳跃度"的乘积.

4. 更一般地，设 Ω 是 $\mathbb{R}$ 内的一个开区间 $(\alpha,\ \beta)$，设 $a\in\Omega$，又设 f 是 $\Omega-\{a\}$ 上的 C^1 类函数. 若极限

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a-0),\ \lim_{x\to a^+}f(x)=f(a+0)$$

存在并且有限，记 $Jf(a)$ 是差 $f(a+0)-f(a-0)$. 函数 f 在 a 点有一个简单的不连续点 (或第一类不连续点)，$Jf(a)$ 就是 f 在 a 点的"跳跃度". 又若 f 的古典导数 $[f']$ 是 $\Omega-\{a\}$ 内的有界函数.

按照我们的假设，f 和 $[f']$ 都确定 Ω 上的广义函数. 现在我们来寻求 f 在广义函数意义下的导数. 对所有 $\phi\in C_C^{\infty}(\Omega)$，我们有

$$\langle f',\ \phi\rangle=-\langle f,\ \phi'\rangle=-\int_{\alpha}^{a}f\cdot\phi'-\int_{a}^{\beta}f\cdot\phi'.$$

由分部积分法，得

$$\langle f',\ \phi\rangle=[f(a+0)-f(a-0)]\phi(a)+\int_{\alpha}^{\beta}[f']\cdot\phi,$$

其中 $[f']$ 表示 f 的古典导数. 把最后式子重写一下即得：对所有 $\phi\in C_C^{\infty}(\Omega)$,

$$\langle f',\ \phi\rangle=\langle Jf(a)\delta_{(a)},\ \phi\rangle+\langle[f'],\ \phi\rangle,$$

于是 $$f'=Jf(a)\delta_{(a)}+[f'],$$

即，在广义函数意义下 f 的导数等于古典导数 $[f']$ 与质量 $Jf(a)$

集中在 a 点的测度之和.

5. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个开子集, 它的边界 Γ 是光滑曲线. 设 $f(x, y)$是 $\Omega\cup\Gamma$ 上的 C^1 类函数, 并且在 $(\Omega\cup\Gamma)^c$ 上为 0. 于是 f 及其偏导数在 Γ 上有简单的不连续点. 用 $\partial f/\partial x$ 表示 f 在广义函数意义下关于 x 的导数, f'_x 表示 f 关于 x 的古典导数. 有

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x}, \phi\right\rangle=-\langle f, \phi'_x\rangle=-\iint_{\Omega} f(x, y)\phi'_x(x, y)\,dx\,dy.$$

由 Green 公式, 可得

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x}, \phi\right\rangle=\iint_{\Omega} f'_x\cdot\phi\,dx\,dy+\int_{\Gamma} f(x, y)\phi(x, y)\cos\alpha\,dl$$

这里 α 是 Γ 的外法向与 x 轴的夹角.

如果定义

$$\langle\mu, \phi\rangle=\int_{\Gamma} f(x, y)\phi(x, y)\cos\alpha\,dl,$$

就可以把 μ 解释为支柱为 Γ 并且给定了密度 $f(x, y)\cos\alpha$ 的 $\mathbb{R}^2$ 上的测度. 上面的式子可换写为

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x}, \phi\right\rangle=\langle f'_x, \phi\rangle+\langle\mu, \phi\rangle.$$

因而可以说, f 在广义函数意义下的导数等于古典导数加上一个集中在边界 Γ 上的测度. 在三维 (n 维) 空间内能够给出相仿的例.

6. 回过来考察例 3, 可以说 Heaviside 函数是微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\delta$$

的一个解.

我们定义 $\mathbb{R}^n$ 内 Heaviside 函数如下:

$$Y(x_1, \cdots, x_n)=\begin{cases}1, & 若\ x_1\geqslant 0, \cdots, x_n\geqslant 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

则 $Y(x_1, \cdots, x_n)$是偏微分方程

$$\frac{\partial^n Y}{\partial x_1\cdots\partial x_n}=\delta$$

的一个解. 我们在 $n=2$ 的情形下来验证它. 按定义, 对一切 $\phi\in C_C^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\left\langle \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1\,\partial x_2},\ \phi\right\rangle=\left\langle Y,\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\,\partial x_2}\right\rangle.$$

另一方面,

$$\left\langle Y,\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\,\partial x_2}\right\rangle=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\,\partial x_2}=\phi(0,\ 0)=\langle\delta,\ \phi\rangle;$$

于是, $\partial^2 Y/\partial x_1\,\partial x_2=\delta$. 证毕.

定义 2.8. 设 $P=P(\partial)=\sum\limits_{|p|\le m}a_p\partial^p$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内常系数线性偏微分算子. 如果一个广义函数 $E\in D'(\mathbb{R}^n)$ 满足 $P(\partial)E=\delta$, 我们就称 E 是偏微分算子 P 的基本解.

若
$$ {}^tP={}^tP(\partial)=\sum_{|p|\le m}(-1)^{|p|}a_p\partial^p$$

是算子 P 的转置, 那么 $E\in D'(\mathbb{R}^n)$ 是基本解当且仅当

$$\langle E,\ {}^tP(\partial)\,\phi\rangle=\phi(0),\quad \phi\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

在上面例 3 和 6 中定义的 Heaviside 函数分别是算子 d/dx 和 $\partial^n/\partial x_1\cdots\partial x_n$ 的基本解. 在第 7 章中, 我们将给出更多的基本解的例子, 并且还将证明常系数线性偏微分算子必存在基本解的 Malgrange 定理.

6. 广义函数的正则空间

定义 2.9. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, 又设 E 是一个拓扑向量空间. 若 (i) $C_C^\infty(\Omega)\subset E\subset D'(\Omega)$, 并且有连续的嵌入, 其中 $D'(\Omega)$ 上装备着强拓扑; (ii) $C_C^\infty(\Omega)$ 在 E 内稠密, 我们就称 E 是 Ω 上广义函数的正则空间.

若 E 是广义函数的正则空间, 条件 (ii) 表明 E 的对偶 E' 是 $D'(\Omega)$ 的一个子空间. 条件 (i) 表明 $E'_b\subset D'(\Omega)$ 具有连续嵌入.

例 1. $C_C^\infty(\Omega)$ 是 Ω 上广义函数的一个平凡的正则空间.

2. 在定理 2.16 的证明中, 我们已经看到 $C_C^\infty(\Omega)\subset C^\infty(\Omega)\subset D'(\Omega)$ 具有连续的嵌入, 并且 $C_C^\infty(\Omega)$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 内稠密; 于是,

$C^\infty(\Omega)$ 是广义函数的一个正则空间，$E'(\Omega)$ 是 $D'(\Omega)$ 的一个子空间。

3．空间 $L^p(\Omega)$，$1\leqslant p<+\infty$，都是广义函数的正则空间．这是因为 $C_C^\infty(\Omega)$ 在 L^p 内稠密这一事实是定理 1.1 的一个结论．又因为 $L^\infty(\Omega)$ 是 $L^1(\Omega)$ 的对偶，这就得出 $L^\infty(\Omega)$ 是 $D'(\Omega)$ 的一个子空间。

4．空间 $C_C^m(\Omega)$，$0\leqslant m\leqslant+\infty$ 是广义函数的正则空间．这同样是由于 $C_C^\infty(\Omega)$ 在 $C_C^m(\Omega)$ 内稠密也是定理 1.1 的一个结论。

7．有限阶广义函数空间

我们考虑空间 $C_C^m(\Omega)$，装备着它的自然拓扑(第 2 节，补充)，并记 $D'^m(\Omega)$ 是它的对偶．因为 $C_C^m(\Omega)$是广义函数的一个正则空间，所以对一切 $m\geqslant 0$，$D'^m(\Omega)$ 是 $D'(\Omega)$ 的子空间．另一方面，$C_C^{m+1}(\Omega)\subset C_C^m(\Omega)$ 具有连续的嵌入，并且 $C_C^{m+1}(\Omega)$在 $C_C^m(\Omega)$ 内稠密；于是 $D'^m(\Omega)\subset D'^{m+1}(\Omega)$，在强拓扑下具有连续嵌入。

定义 2.10． 一个广义函数 $T\in D'(\Omega)$，如果 $T\in D'^m(\Omega)$，我们就称它有阶$\leqslant m$．我们称 T 有阶 m 是指：使得 $T\in D'^m(\Omega)$ 成立的最小整数是 m。

例 1．Dirac 测度是一个 0 阶广义函数．所有 0 阶广义函数都是 Radon 测度。

2．若 $|p|=m$，则 $\partial^p\delta=\delta^{(p)}$ 是一个 m 阶广义函数。

3．每个广义函数 $T\in E'(\Omega)$ 都是有限阶的．这一事实是第 9 节中将证明的定理 2.22 的一个结论。

设 $D_F(\Omega)$ 是空间 $C_C^\infty(\Omega)$，但在它上面装备着对所有 $m\geqslant 0$，嵌入 $C_C^\infty(\Omega)\to C_C^m(\Omega)$ 为连续的最粗糙的拓扑．我们断言 $D_F(\Omega)$ 是广义函数的正则空间．首先，恒等映射 $C_C^\infty(\Omega)\to D_F(\Omega)$ 是连续的．事实上，这只要证明对每个紧集 $K\subset\Omega$，恒等映射 $C_C^\infty(\Omega;K)\to D_F(\Omega)$ 是连续的(命题 1.1)．又因为 $D_F(\Omega)$ 的拓扑是使得对一切 $m\geqslant 0$，嵌入 $C_C^\infty(\Omega)\to C_C^m(\Omega)$ 为连续的最粗糙的拓扑，再由一

般拓扑的已知结果，于是只要证明恒等映射 $C_C^m(\Omega;\ K)\to C_C^m(\Omega)$ 对一切 $m\geqslant0$ 是连续的，而这是平凡的．显然，$C_C^\infty(\Omega)$ 在 $D_F(\Omega)$ 内稠密．最后，嵌入 $D_F(\Omega)\to D'(\Omega)$ 分解为嵌入 $D_F(\Omega)=C_C^\infty(\Omega)\to C_C^m(\Omega)$ 和嵌入 $C_C^m(\Omega)\to D'(\Omega)$，而前一个嵌入由定义是连续的，后一个嵌入因为 $C_C^m(\Omega)$ 是广义函数的正则空间，所以也是连续的．

如果我们记 $D'_F(\Omega)$ 是 $D_F(\Omega)$ 的对偶，那么 $D'_F(\Omega)$ 是 $D'(\Omega)$ 的一个子空间，并且

$$D'_F(\Omega)=\bigcup_{m\geqslant0}D'^m(\Omega),$$

即，$D'_F(\Omega)$ 是有限阶广义函数的空间．

一般说来，空间 $D'_F(\Omega)$ 和 $D'(\Omega)$ 是不同的．事实上，设 $\Omega=\mathbb{R}$，令 δ_k 是点 $k\in\mathbb{N}$ 上的 Dirac 测度 [即，$\delta_k(\phi)=\phi(k)$ 对一切 $\phi\in C_C^\infty(\mathbb{R})$ 成立]，再令 $\delta_k^{(k)}$ 是 δ_k 的 k 阶导数．容易看出级数 $T=\sum\limits_{k\geqslant0}\delta_k^{(k)}$ 确定一个广义函数，并且 $T\notin D'_F(\mathbb{R})$，这个例子还表明 $D_F(\mathbb{R})$ 上的拓扑比 $C_C^\infty(\mathbb{R})$ 上的自然拓扑严格地粗糙．

8. 在实直线上定义的广义函数的一些性质

作为广义函数导数定义的一个应用，我们能够定义广义函数的*原函数或不定积分*．其理论在一个变量的情形显得特别简单．在这里我们仅讨论一个变量的情形，而把多变量的情形略去．上述两种情形在 Schwartz 的书中作了讨论[28, II 章]．

定义 2.11. 设 $T\in D'(\mathbb{R})$，$S\in D'(\mathbb{R})$，如果 $dT/dx=S$，就称 T 是 S 的一个原函数．

定理 2.17. $\mathbb{R}$ 上的每个广义函数都有无限多个原函数，任何两个原函数之差是一常数．

证明 1．记 H 是 $C_C^\infty(\mathbb{R})$ 的一个子空间，它是由所有满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(t)\,dt=0$$

的函数 $\chi(t)\in C_C^\infty(\mathbb{R})$ 组成. 一个函数 χ 属于 H 当且仅当存在 $\psi\in C_C^\infty(\mathbb{R})$ 使得 $\chi=\psi'$. 事实上, 若 $\chi\in H$, 函数

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{x}\chi(t)\,dt$$

显然属于 $C_C^\infty(\mathbb{R})$. 反之, 若 $\chi=\psi'$ 并且 $\psi\in C_C^\infty(\mathbb{R})$, 则 χ 必满足上面的条件.

2. 子空间 H 是 $C_C^\infty(\mathbb{R})$ 的一个超平面 (即它的余维数是 1), 这是因为它是由一个齐次线性方程的所有解组成的. 选取 $\phi_0\in C_C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0(t)\,dt=1.$$

那么, 每个 $\phi\in C_C^\infty(\mathbb{R})$ 可以唯一地表示为

$$\phi=\lambda\phi_0+\chi,$$

其中

$$\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\,dt$$

以及 $\chi\in H$, 即对某个 $\psi\in C_C^\infty(\mathbb{R})$ 有 $\chi=\psi'$.

3. 其次, 容易验证一个广义函数 T 是某个给定的 $S\in D'(\mathbb{R})$ 的原函数当且仅当对每个 $\chi\in H$, 成立

$$T(\chi)=-S(\psi),$$

其中 $\chi=\psi'$.

4. 如果给定 $S\in D'(\mathbb{R})$, 定义

$$T(\phi)=\lambda T(\phi_0)-S(\psi),\ \forall\phi\in C_C^\infty(\mathbb{R}),$$

其中 $T(\phi_0)$ 是一个任意常数. 由这一定义容易知道对每个 $\chi\in H$, 有 $T(\chi)=-S(\psi)$. 剩下来要证明 T 是 $\mathbb{R}$ 上的广义函数. 根据定理 2.13, 只要证明若 (ϕ_k) 是 $C_C^\infty(\mathbb{R})$ 中的一个收敛于 0 的序列, 那么数列 $(T(\phi_k))$ 也收敛于 0. 如果序列 (ϕ_k) 在 $C_C^\infty(\mathbb{R})$ 内收敛于 0, 那么所有的函数 ϕ_k 的支柱含在 $\mathbb{R}$ 的一个固定的紧子集内, 并且 ϕ_k 连同其偏导数在 $\mathbb{R}$ 内一致收敛于 0. 于是

$$\lambda_k=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_k(t)\,dt\to 0\quad(k\to+\infty).$$

这样一来, 我们有: 在 $C_C^\infty(\mathbb{R})$ 内当 $k\to+\infty$ 时,

$$\chi_k = \phi_k - \lambda_k \phi_0 \to 0.$$

于是 $T(\phi_k) = \lambda_k T(\phi_0) - S(\psi_k) \to 0 (k \to +\infty)$.

5. 最后，若 T_1 和 T_2 是 S 的两个原函数. 那么，我们有

$$\langle T_1 - T_2, \phi \rangle = \lambda \langle T_1 - T_2, \phi_0 \rangle.$$

令 $C = \langle T_1 - T_2, \phi_0 \rangle$ 并注意到 λ 的定义，有

$$\langle T_1 - T_2, \phi \rangle = C \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, dt$$

$$= \langle C, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R});$$

于是 $T_1 - T_2 = C$. 证毕.

作为定理 2.17 的一个推论，如果 $\mathbb{R}$ 上的一个广义函数的导数等于 0，那么很明显它必定是常数. 并且，若 $T \in D'(\mathbb{R})$ 满足

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0,$$

那么 T 是一个多项式 $Ax + B$. 事实上，设 $S = dT/dx$. 因为

$$\frac{dS}{dx} = 0,$$

所以 S 等于一个常数. 现在比较两个广义函数 T 和 Ax，它们有相同的导数 S，于是它们之差是一个常数 B. 因此 $T = Ax + B$，证毕.

如果我们称广义函数 T 是广义函数 S 的 p 阶原函数，这里

$$\frac{d^pT}{dx^p} = S,$$

那就可以把上述结果概要地叙述如下：

系 实直线上的任一广义函数都有无限多个 p 阶原函数. 任何两个这种原函数之差是一个阶 $\leqslant p-1$ 的多项式.

定义 2.12. 设函数 f 定义在 $[a, b]$ 上. 如果对给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任何有限多个互不重迭的区间 (x_i, y_i) 满足

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < \delta$$

时，有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)| < \varepsilon,$$

就称 f 在 $[a, b]$ 绝对连续.

每个绝对连续函数是连续的. 一个函数是绝对连续当且仅当它是在 Lebesgue 积分意义下的不定积分[25, p. 106].

定理 2.18. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 又设

$$f'(x)=g(x) \quad \text{a. e.}$$

并且 $g(x)$ 是局部可积. 则在广义函数意义下 f 的导数是 g.

证明 对所有 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 有

$$\langle f', \phi\rangle=-\langle f, \phi'\rangle=-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx.$$

进行分部积分, 得

$$\langle f', \phi\rangle=-f\cdot\phi\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\phi(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\phi(x)dx=\langle g, \phi\rangle;$$

于是作为广义函数 $f'=g$. 证毕.

定理 2.19. 若 $T\in D'(\mathbb{R})$ 的导数是一个局部可积函数 $g(x)$, 则 T 是一个绝对连续函数.

证明 因为由假设 g 是一个局部可积函数, 于是积分

$$f(x)=\int_a^x g(t)dt$$

有意义并且 f 是 g 的一个原函数, 即

$$f'(x)=g(x) \quad \text{a. e.}$$

[25, p. 103]. 并且, f 是绝对连续函数[25, p. 106].

由定理 2.18, 在广义函数意义下 f 的导数也是 g, 于是广义函数 $T-f$ 等于一个常数, 这就证明了 T 是一个绝对连续函数. 证毕.

这两个定理都可以推广到多变量函数的情形 [28, 第 II 章定理 V].

9. 广义函数的局部结构

在第 5 节中我们已经引进了广义函数的导数的概念, 并且还

看到每个广义函数有任意阶的导数．这一新的导数概念特别允许我们在把局部可积函数看作广义函数时，可以对它和它的导数进行微分．在下面的定理中，将证明每一个广义函数局部地是一个有界函数的导数（在广义函数意义下）．按照 Schwartz [28，第 III 章定理 XXI]，我们有

定理 2.20. 设 $T\in D'(\Omega)$，并设 ω 是一个相对紧开集，使得 $\bar{\omega}\subset\Omega$．则能够找到一个函数 $f\in L^\infty(\omega)$ 和一个整数 $m\geqslant 0$，使得在 ω 上，

$$T=\frac{\partial^{mn}f}{\partial x_1^m\cdots\partial x_n^m}.$$

证明 1．设 $K=\bar{\omega}$．因为 T 是一个广义函数，所以 T 是 $C_c^\infty(\Omega;K)$ 上的一个连续线性泛函．于是，给定 $\varepsilon>0$，能找到一个邻域

$$\begin{aligned}V&=V(K,k,\eta)\\&=\{\phi\in C_c^\infty(\Omega;K):|\partial^\alpha\phi(x)|\leqslant\eta,\ \forall|\alpha|\leqslant k,\ \forall x\in K\},\end{aligned}\tag{2.5}$$

使得

$$|T(\phi)|\leqslant\varepsilon,\ \forall\phi\in V.\tag{2.6}$$

2．为了简化记号，我们记 $\partial^m/\partial x^m$ 为偏导数

$$\frac{\partial^{mn}}{\partial x_1^m\cdots\partial x_n^m},$$

其中 m 是非负整数．设 E 是所有形如

$$\psi=\frac{\partial^{k+1}\phi}{\partial x^{k+1}},\quad\forall\phi\in C_c^\infty(\Omega;K)\tag{2.7}$$

的函数组成的子空间．因为这些函数有紧支柱，所以由 (2.7) 给出的 ϕ 与 ψ 之间的对应是一对一的．

设 $L^1(K)$ 是 K 上所有可积函数组成的 Banach 空间，在 E 上考察由 $L^1(K)$ 导出的拓扑．我们要证明若函数序列

$$\psi_j=\frac{\partial^{k+1}\phi_j}{\partial x^{k+1}}$$

在 $L^1(K)$ 内收敛于 0，则序列 $T(\phi_j)$ 收敛于 0．事实上，设 Q 是边长 $l\geqslant 1$ 并且含有 K 的超立方体．对任意 $\eta>0$，存在指标 j_0，使得

对一切 $j>j_0$,

$$\int\cdots\int_K \left|\frac{\partial^{k+1}\phi_j}{\partial x^{k+1}}\right| dx_1\cdots dx_n \leqslant \frac{\eta}{l^{(k+1)n}}, \tag{2.8}$$

而

$$\frac{\partial^k \phi_j}{\partial x^k}(x) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial^{k+1}\phi_j}{\partial t^{k+1}}\, dt_1\cdots dt_n. \tag{2.9}$$

因为 $l\geqslant 1$, 故由(2.8)容易推出

$$\left|\frac{\partial^k \phi_j}{\partial x^k}\right| \leqslant \frac{\eta}{l^{kn}}. \tag{2.10}$$

多次利用积分表示式(2.9),容易看出由不等式(2.10)便得到

$$|\partial^\alpha \phi_j(x)| \leqslant \eta,\ \forall x\in K,\ \forall |\alpha|\leqslant k,\ \forall j\geqslant j_0, \tag{2.11}$$

这就证明了对所有 $j\geqslant j_0$, $\phi_j\in V$, 于是有 $|T(\phi_j)|\leqslant\varepsilon$, $\forall j\geqslant j_0$. 这样,便立即获得我们的论断.

3. 在 E 上定义线性泛函

$$L(\psi) = T(\phi),$$

这里 ϕ 与 ψ 是由(2.7)联系的. 由刚才已经证明了的结论知道, L 是 E 上的一个连续线性泛函, E 上的拓扑是由 $L^1(K)$ 导出的. 因为 E 显然是 $L^1(K)$ 的一个真线性子空间, 根据 Hahn-Banach 定理,线性泛函 L 能够扩张为 $L^1(K)$ 上的一个连续线性泛函 $\tilde{L}$. 再由 $L^1(K)$ 上连续线性泛函的特征 [25, p. 246], 存在一个元素 $g\in L^\infty(K)$ 使得

$$\tilde{L}(\psi) = \int\cdots\int_K g\cdot\psi,\ \forall\psi\in E.$$

这样一来,对每个 $\phi\in C_C^\infty(\Omega;\ K)$, 更不必说对每个 $\phi\in C_C^\infty(\omega)$,我们有

$$T(\phi) = L(\psi) = \int\cdots\int_K g\cdot\frac{\partial^{k+1}\phi}{\partial x^{k+1}} = \left\langle (-1)^{(k+1)n}\frac{\partial^{k+1}g}{\partial x^{k+1}},\ \phi\right\rangle,$$

由此便得知,设 $m=k+1$, $f=(-1)^{mn}g$, 于是在 ω 上,

$$T = \frac{\partial^m f}{\partial x^m}.\quad \text{证毕.}$$

注 1. 函数 f 并不一定是唯一的. 事实上,可以将

$$\frac{\partial^m h}{\partial x^m}=0$$

的任何一个解加到 f 上去.

2. 设在 K^c 上 $f=0$, 并定义

$$F(x_1,\ \cdots,\ x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(t_1,\ \cdots,\ t_n)dt_1\cdots dt_n.$$

显然, F 是连续函数, 并且 $\partial^n F/\partial x_1\cdots\partial x_n=f$. 作适当的代替, 可得

$$T=\frac{\partial^{m+1}F}{\partial x^{m+1}},\ 在\ \omega\ 上.$$

于是, 广义函数 T 能够局部地表示为一个连续函数的导数.

3. 设 U 是 $K=\bar{\omega}$ 的一个开邻域, 并且 $U\subset\Omega$. 又设 $\alpha\in C_c^\infty(\Omega)$, 并且在 K 上 $\alpha=1$, 令 $G=\alpha F$. 显然

$$T=\frac{\partial^{m+1}G}{\partial x^{m+1}},\ 在\ \omega\ 上.$$

这里的 G 是一个有紧支柱的连续函数, 其紧支柱是在 K 的开邻域 U 内.

我们将这些结果概括为下列定理.

定理 2.21. 设 $T\in D'(\Omega)$, 又设 ω 是一个相对紧开集, 使得 $\bar{\omega}\subset\Omega$. 则广义函数 T 在 ω 上, 等于一个有紧支柱的连续函数的导数, 而这个连续函数的紧支柱是在 $\bar{\omega}$ 的任意一个开邻域内.

注 定理 2.20 和 2.21 都是局部的性质. 若 Ω 是一个开集但不是相对紧的, 则一般说来, Ω 上的广义函数未必可以表示为一个函数的导数. 例如第 7 节最后所定义的 $\mathbf{R}$ 上的广义函数 $T=\sum\limits_{k\geq 0}\delta_k^{(k)}$ 是测度的导数之和.

然而对于有紧支柱的广义函数, 能够给出在 Ω 内的一个整体表示.

定理 2.22. 每个广义函数 $T\in E'(\Omega)$ 可以表示为 (但非唯一的)

$$T=\sum_{|p|\leq r}\partial^p f_p,\quad 在\ \Omega\ 上,$$

其中 f_p 都是有紧支柱的连续函数, 它们的紧支柱是在 T 的紧支柱

K的某个任意的邻域内.

证明 设ω是一个相对紧的开集，使得

$$K\subset\omega\subset\bar{\omega}\subset U\subset\Omega.$$

由定理2.21，存在一个其紧支柱在U内的连续函数f使得

$$T=\partial^r f,\ 在\ \omega\ 上,$$

即
$$\langle T,\ \psi\rangle=(-1)^{|r|}\int\cdots\int_{\Omega} f\cdot\partial^r\psi,\ \forall\psi\in C_c^\infty(\omega).$$

设$\alpha\in C_c^\infty(\omega)$，在$K$的一个邻域内$\alpha$等于1. 那么，对每个$\phi\in C^\infty(\Omega)$，我们有

$$\langle T,\ \phi\rangle=\langle T,\ \alpha\phi\rangle=(-1)^{|r|}\int\cdots\int_{\Omega} f\cdot\partial^r(\alpha\phi).$$

由 Leibniz 公式(见第1章习题3)

$$\partial^r(\alpha\cdot\phi)=\sum_{p\leqslant r}\frac{r!}{p!(r-p)!}\partial^{r-p}\alpha\cdot\partial^p\phi.$$

于是，
$$\langle T,\ \phi\rangle=(-1)^{|r|}\sum_{p\leqslant r}\frac{r!}{p!(r-p)!}\int\cdots\int_{\Omega} f\cdot\partial^{r-p}\alpha\cdot\partial^p\phi.$$

令
$$f_p=(-1)^{|r|+|p|}\frac{r!}{p!(r-p)!}f\cdot\partial^{r-p}\alpha,$$

并作分部积分，便得到对一切$\phi\in C^\infty(\Omega)$有

$$\langle T,\ \phi\rangle=\int\cdots\int_{\Omega}\left[\sum_{p\leqslant r}\partial^p f_p\right]\phi.$$

证毕.

系 每个有紧支柱的广义函数是有限阶的.

证明 若$T=\partial^p f$，这里f是$\mathbb{R}^n$内的局部可积函数，这样T就确定了$C_c^{|p|}(\mathbb{R}^n)$上的一个连续线性泛函，于是T是有限阶的. 证毕.

例 1. 我们已经知道(见第5节，例6) Dirac 测度可以表示为

$$\delta=\frac{\partial^n Y}{\partial x_1\cdots\partial x_n},$$

这里Y是 Heaviside 函数，它是$\mathbb{R}^n$内的一个有界函数.

2. 设K是$\mathbb{R}$内紧集. K 的特征函数 $\chi_K(t)$ 确定 $E'(\mathbb{R})$ 的一个元素. 函数

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}\chi_K(t)dt$$

是绝对连续的，再由定理 2.14 有

$$\frac{df}{dx}=\chi_K,$$

即，广义函数 χ_K 可以表示为一个连续函数的导数.

由广义函数支柱的定义立即可得：若 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$，并且它在 $T\in D'(\Omega)$ 的支柱的某个邻域上为 0，那么 $\langle T, \phi\rangle=0$. 现在我们来证明当 T 有紧支柱时这一结果可以大大改善.

定理 2.23. 设 T 是有紧支柱 $K\subset\Omega$ 的广义函数，并设它的阶 $\leqslant m$. 那么对所有满足下面条件的 $\phi\in C^\infty(\Omega)$：在 K 上 $\partial^p\phi=0$ 对一切 $|p|\leqslant m$ 成立，总有 $\langle T, \phi\rangle=0$.

证明 1. 设 K_ε 是K的 ε 邻域. 因为，由假设，当 $|p|=m$ 时所有导数 $\partial^p\phi$ 在 K 上为 0，所以给定 $\eta>0$，能找到充分小的 $\varepsilon>0$ 使得 $K_\varepsilon\subset\Omega$ 并且

$$|\partial^p\phi(x)|\leqslant\eta,\ \forall x\in K_\varepsilon.$$

对每个 $x\in K_\varepsilon$，设 $x_0\in K$ 使得 x_0 与 x 之间的距离至多是 ε. 那么，若 $|p|=m-1$，我们能够记[因为 $\partial^p\phi(x_0)=0$]

$$\partial^p\phi(x)=\int_0^1\sum_{j=1}^{n}\partial_j\partial^p\phi(x_0+t(x-x_0))\cdot(x_j-x_{0,j})dt;$$

于是得
$$|\partial^p\phi(x)|\leqslant(\varepsilon\sqrt{n})\eta.$$

再由归纳法，有

$$|\partial^p\phi(x)|\leqslant(\varepsilon\sqrt{n})^{m-|p|}\cdot\eta,\ \forall|p|\leqslant m. \tag{2.12}$$

2. 和证明定理 1.1 的系 3 相仿，我们能够找到一个函数 α_ε 具有以下性质：$\alpha_\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega)$，$\operatorname{Supp}\alpha_\varepsilon\subset K_\varepsilon$，在 $K_{\varepsilon/4}$ 上 $\alpha_\varepsilon=1$，并且

$$|\partial^p\alpha_\varepsilon(x)|\leqslant C(p, n)\varepsilon^{-|p|},\ \forall x.$$

选取充分大的 $C>0$，可得

$$|\partial^p\alpha_\varepsilon(x)|\leqslant C\cdot\varepsilon^{-|p|},\ \forall x,\ \forall|p|\leqslant m. \tag{2.13}$$

3. 设 $\psi_\varepsilon=\alpha_\varepsilon\phi$. 由 Leibniz 公式有

$$\partial^p \psi_\varepsilon = \sum_{q\leqslant p} \frac{p!}{q!(p-q)!} \partial^{p-q}\alpha_\varepsilon \cdot \partial^q \phi.$$

将不等式(2.12)和(2.13)代入上式，便得到估计式

$$|\partial^p \psi_\varepsilon(x)| \leqslant C\varepsilon^{-|p|+|q|} \cdot (\varepsilon\sqrt{n})^{m-|q|} \cdot \eta \leqslant C\cdot\eta \qquad (2.14)$$

对所有 x 和所有 $|p|\leqslant m$ 成立。其中 C 是一个适当的常数，它与 m 和 n 有关，而与 p 无关。

4. 因为在 T 的支柱 K 的某个邻域上 $\psi_\varepsilon=\phi$，所以有

$$\langle T, \psi_\varepsilon\rangle = \langle T, \phi\rangle. \qquad (2.15)$$

另一方面，因为 $T\in D'^m(\Omega)$，由定理 2.12，存在一个常数 $C_1>0$ 使得

$$|\langle T, \chi\rangle| \leqslant C_1 \sup_{\substack{x\in\Omega\\|p|\leqslant m}} |\partial^p\chi|, \ \forall\chi\in C_C^\infty(\Omega, K_\varepsilon).$$

用 ψ_ε 代替 χ，并利用(2.14)和(2.15)，即得

$$|\langle T, \phi\rangle| \leqslant C_1 C\eta$$

这表明，由于 η 是任意正数，故 $\langle T, \phi\rangle=0$。证毕。

作为上述定理的一个结论，我们可以给出支柱在原点的广义函数的特征，即下面的定理：

定理 2.24. 每一个支柱是原点的广义函数都可以唯一地表示为 Dirac 测度及其导数的有限线性组合。

证明 因为 T 有紧支柱，由定理 2.22 的系，T 是有限阶广义函数，即对某个 $m\in\mathbb{N}$，$T\in D'^m$。

另一方面，每个 $\phi\in C^\infty$ 可以写为

$$\phi(x) = \sum_{|p|\leqslant m} \frac{\partial^p\phi(0)}{p!} x^p + R_m(x),$$

其中 R_m 是 C^∞ 函数，并且对所有 $|p|\leqslant m$，有 $\partial^p R_m(0)=0$。再由定理 2.23 得

$$\langle T, \phi\rangle = \sum_{|p|\leqslant m} \frac{\partial^p\phi(0)}{p!} \langle T, x^p\rangle.$$

令
$$C_p = \frac{(-1)^{|p|}\langle T, x^p\rangle}{p!}$$

我们得
$$T = \sum_{|p|\leqslant m} C_p \partial^p \delta.$$

这一分解的唯一性是因为，若 $T=0$，则 $\langle T, x^p\rangle=0$；于是 $\mathcal{T}_p=0$，$\forall p$. 证毕.

习 题

1．证明

$$p_{m,j}(\phi)=\sup_{\substack{x\in K_j\\|\alpha|\leqslant m}}|\partial^\alpha\phi(x)|,\ m\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,$$

是 $C^\infty(\Omega)$ 上的一个半范，其中 (K_j) 是 Ω 的一列增加的紧子集，其和为 Ω.

2．在建立 $C^\infty(\Omega)$ 上自然拓扑的时候，如果用另外一列增加的紧子集并且它们的和为 Ω 来代替 (K_j)，证明该自然拓扑不变.

3．证明集族

$$V=V(m,j,\varepsilon)=\{\phi\in C^\infty(\Omega):p_{m,j}(\phi)<\varepsilon\},$$

其中 $m\geqslant 0$, $j=1,2,\cdots$, 以及 $\varepsilon>0$, 组成 $C^\infty(\Omega)$ 内 0 的凸、平衡、吸收、开的基本邻域组.

4．证明下列条件的等价性：(i) (ϕ_k) 是 $C^m(\Omega)$ 内的收敛于 0 的序列；(ii) 对每个 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，序列 $(\partial^\alpha\phi_k)$ 在 $C(\Omega)$ 内收敛于 0；(iii) 对任何 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，序列 $(\partial^\alpha\phi_k)$ 在 Ω 的每个紧子集上收敛于 0.

5．证明 $C^m(\Omega)$ 上的自然拓扑是对每个 $|\alpha|\leqslant m$，线性映射

$$\partial^\alpha: C^m(\Omega)\to C(\Omega)$$

为连续的最弱拓扑，其中 $C(\Omega)$ 装备着自然拓扑.

6．证明：(i) 若 $u\in C^m(\mathbf{R}^n)$，则 $\alpha_\varepsilon * u\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，并且在 C^m 内当 $\varepsilon\to 0$ 时收敛于 u，其中 α_ε 是第 1 章第 2 节中定义的检验函数；(ii) 若 $u\in C_0^m(\mathbf{R}^n)$，则 $\alpha_\varepsilon * u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在 C_0^m 内收敛于 u.

7．证明 $C^\infty(\Omega)$ 上的自然拓扑是对每个 $m>0$，恒等映射 $C^\infty(\Omega)\to C^m(\Omega)$ 为连续的最弱的拓扑.

8．$C^\infty(\Omega)$ 的子集 A 是有界的当且仅当，对每个 α，集 $\partial^\alpha A=\{\partial^\alpha\phi:\phi\in A\}$ 在 $C(\Omega)$ 内有界.

9．设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 的一个开子集，并记 $H(\Omega)$ 是 Ω 上所有全纯函数组成的向量空间. 证明：(i) 在 $H(\Omega)$ 上由 $C(\Omega)$ 导出的拓扑和由 $C^\infty(\Omega)$ 导出的拓扑是一致的(提示：利用 Cauchy 公式)；(ii) $H(\Omega)$ 是 Montel 空间.

10．证明：(i) $p_m(\phi)=\sup\limits_{\substack{x\in K\\|\alpha|\leqslant m}}|\partial^\alpha\phi(x)|$, $m\in\mathbf{N}$, 是 $C_0^\infty(\Omega;K)$ 上的一个范数. (ii) 在 $C_0^\infty(\Omega;K)$ 上由一列范数 $(p_m)_{m\in\mathbf{N}}$ 所定义的拓扑与由 $C^\infty(\Omega)$ 导出的拓扑是一致的.

11．证明对任何 $m\in\mathbf{N}$，恒等映射 $C_0^\infty(\Omega)\to C_0^m(\Omega)$ 是连续的，并且

$C_C^\infty(\Omega)$ 在 $C_C^m(\Omega)$ 内稠密.

12. 证明 $C_C^\infty(\Omega; K)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 的闭子空间.

13. 证明定理 2.8.

14. 若 $\alpha \in C^\infty(\Omega)$, 证明线性映射 $C_C^\infty(\Omega) \ni \phi \to \alpha \cdot \phi \in C_C^\infty(\Omega)$ 是连续的.

15. 证明导数 ∂_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, 是 $C_C^\infty(\Omega)$ 到 $C_C^\infty(\Omega)$ 内的连续的线性映射.

16. 证明空间 $L_{loc}^p(\Omega)$ 和 $L^p(\Omega)$ 都是广义函数的正则空间.

17. $L^\infty(\Omega)$ 是广义函数的正则空间吗?

18. 若 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 内的开集,证明 $C^m(\Omega)$ 是广义函数的正则空间. 它的对偶 $E'^m(\Omega)$ 是 Ω 内有紧支柱的并且阶为 m 的广义函数空间.

19. 设 x 是实变数. 计算在广义函数意义下 $|x|$ 的逐次导数.

20. 设 $Y(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上 Heaviside 函数. 证明: (i) $Y(x)e^{\lambda x}$ 是算子 $P(d/dx) = (d/dx) - \lambda$ 的一个基本解, λ 是复数; (ii) $Y(x)e^{\lambda x}x^{m-1}/(m-1)!$ 是 $[(d/dx) - \lambda]^m$ 的一个基本解; (iii) $Y(x) \cdot \dfrac{\sin \omega x}{\omega}$ 是算子 $Q(d/dx) = (d^2/dx^2) + \omega^2$ 的一个基本解, ω 为实数.

21. 求 $(d/dx)\left[\mathrm{PV}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

22. 设

$$\mathrm{FP}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx - 2\frac{\phi(0)}{\varepsilon}\right]$$

它表示左边积分的有限部分. 证明映射

$$\phi \in C_C^\infty(\mathbf{R}) \to \mathrm{FP}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx$$

确定 $\mathbf{R}$ 上的一个广义函数, 记为 $\mathrm{FP}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. 将它与 $(d/dx)\left[\mathrm{PV}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ 比较之.

23. 证明映射

$$\phi \in C_C^\infty(\mathbf{R}) \to \mathrm{FP}\int_0^\infty \frac{\phi(x)}{x}\,dx$$

确定 $\mathbf{R}$ 上的一个广义函数, 记为 $\mathrm{FP}[Y(x)/x]$, 这里

$$\mathrm{FP}\int_0^\infty \frac{\phi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{\phi(x)}{x}\,dx + \phi(0)\log \varepsilon\right]$$

求它的导数.

24. 证明极限

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\,dx - \frac{\phi(0)}{\varepsilon} + \phi'(0)\log \varepsilon\right]$$

等于积分 $\int_0^\infty [\phi(x)/x^2]dx$ 的有限部分. 然后, 定义广义函数 $\mathrm{FP}[Y(x)/x^2]$, 并与 $(d/dx)\{\mathrm{FP}[Y(x)/x]\}$ 比较之.

第 3 章

卷　　积

1. 广义函数的直积

设 Ω 和 Ω' 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 的开子集. 若 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$, $\psi\in C_c^\infty(\Omega')$, 我们记 $\phi\otimes\psi$ 为函数

$$\phi\otimes\psi(x,\ y)=\phi(x)\cdot\psi(y).$$

代数的张量积 $C_c^\infty(\Omega)\otimes C_c^\infty(\Omega')$ 是向量空间, 它由所有可以表示为有限和

$$u(x,\ y)=\sum\phi_j(x)\cdot\psi_j(y)$$

的函数 $u(x, y)$ 组成的, 其中 $\phi_j\in C_c^\infty(\Omega)$, $\psi_j\in C_c^\infty(\Omega')$. 显然, $C_c^\infty(\Omega)\otimes C_c^\infty(\Omega')$ 是 $C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$ 的向量子空间, 而 $C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$ 是由变量为 $(x, y)=(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ 并且在 $\Omega\times\Omega'$ 内有紧支柱的所有 C^∞ 函数组成的. 可以证明, 限制在 $\Omega\times\Omega'$ 上的 (x, y) 的多项式在 $C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$ 内稠密, 这里 $C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$ 装备着自然拓扑. (见 [17, p.369].) 由此推得张量积 $C_c^\infty(\Omega)\otimes C_c^\infty(\Omega')$ 在 $C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$ 内稠密. 事实上, 如对每个 $u\in C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$, 存在多项式序列 $(P_k(x, y))$, 在 $C^\infty(\Omega\times\Omega')$ 内收敛于 u, 那么, 取 $\alpha\in C_c^\infty(\Omega)$ 和 $\beta\in C_c^\infty(\Omega')$, 使得在 u 的支柱的一个邻域上有 $\alpha(x)\beta(y)=1$, 序列 $(\alpha(x)\beta(y)P_k(x, y))$ 属于 $C_c^\infty(\Omega)\otimes C_c^\infty(\Omega')$ 并且在 $C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$ 内收敛于 u. 这样便获得一个结论, 每个广义函数 $T\in D'(\Omega\times\Omega')$ 由它在函数 $\phi\otimes\psi$ 上的值完全确定, 这里 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$, $\psi\in C_c^\infty(\Omega')$.

定理 3.1. 设 $S\in D'(\Omega)$, $T\in D'(\Omega)$. 存在一个且只有一个广义函数 $S\otimes T\in D'(\Omega\times\Omega')$, 由下式定义:

$$\begin{aligned}\langle S\otimes T,\ u(x,\ y)\rangle&=\langle S_x,\ \langle T_y,\ u(x,\ y)\rangle\rangle\\&=\langle T_y,\ \langle S_x,\ u(x,\ y)\rangle\rangle\end{aligned}\qquad(3.1)$$

(对所有 $u\in C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$)，并且对所有 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$ 和所有 $\psi\in C_c^\infty(\Omega')$，使得

$$\langle S\otimes T,\ \phi\otimes\psi\rangle=\langle S,\ \phi\rangle\cdot\langle T,\ \psi\rangle. \tag{3.2}$$

称广义函数 $S\otimes T$ 是 S 和 T 的直积(或张量积).

公式 (3.1) 可以看作 Fubini 定理的一个拓广. 事实上，若 $S=f(x)$ 和 $T=g(y)$ 分别是 Ω 和 Ω' 上的两个局部可积函数，则有

$$\langle S_x,\ \langle T_y,\ u(x,\ y)\rangle\rangle=\int_\Omega f(x)\left\{\int_{\Omega'}g(y)u(x,\ y)\,dy\right\}dx,$$

$$\langle T_y,\ \langle S_x,\ u(x,\ y)\rangle\rangle=\int_{\Omega'}g(y)\left\{\int_\Omega f(x)u(x,\ y)\,dx\right\}dy,$$

由 Fubini 定理，它们都等于

$$\langle S\otimes T,\ u\rangle=\int_{\Omega\times\Omega'}f(x)g(y)u(x,\ y)\,dx\,dy.$$

定理 3.1 的证明要利用下面两个引理，它们是含参变量积分的连续性和可微性的经典结果在广义函数上的拓广.

引理 3.1. 设 $\phi(x,\lambda)$ 是 $C_c^\infty(\Omega)$ 的一族函数，依赖于一个实或复的参数 λ. 假定：(i) 当 λ 在 λ_0 的某个邻域 $V(\lambda_0)$ 内时，$\phi(x,\ \lambda)$ 的支柱含在 Ω 的一个固定的紧子集内；(ii) 对每个 $p=(p_1,\ \cdots,\ p_n)$，导数 $(\partial^p\phi/\partial x^p)(x,\ \lambda)$ 是两个变量 $(x,\ \lambda)$ 的连续函数，则对任何 $T\in D'(\Omega)$.

$$\langle T_x,\ \phi(x,\ \lambda)\rangle$$

是 λ 的连续函数.

证明 设

$$\psi_\lambda(x)=\phi(x,\ \lambda)-\phi(x,\ \lambda_0).$$

条件(i)和(ii)表明当 $\lambda\to\lambda_0$ 时，在 $C_c^\infty(\Omega)$ 内 $\psi_\lambda\to0$. 于是，对每个 $T\in D'(\Omega)$，当 $\lambda\to\lambda_0$ 时，

$$\langle T_x,\ \psi_\lambda(x)\rangle\to0,$$

这就推得 $\langle T_x,\ \phi(x,\ \lambda)\rangle$ 的连续性. 证毕.

引理 3.2. 设 $\phi(x,\ \lambda)$ 是 $C_c^\infty(\Omega)$ 的一族函数，依赖于一个实或复的参数. 假定：(i) 当 λ 在 λ_0 的某个邻域 $V(\lambda_0)$ 内时，$\phi(x,\ \lambda)$ 的支柱含在 Ω 的一个固定的紧子集内. (ii) 对每个 $p=(p_1,\ \cdots,$

p_n), $(\partial^p\phi/\partial x^p)(x,\ \lambda)$的导数(在古典意义下)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial^p\phi}{\partial x^p}(x,\ \lambda)$$

是两个变量$(x,\ \lambda)$的连续函数. 则,对每个$T\in D'(\Omega)$,

$$\langle T_x,\ \phi(x,\ \lambda)\rangle$$

在λ_0的一个邻域内可微,并且

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle T_x,\ \phi(x,\ \lambda)\rangle=\left\langle T_x,\ \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(x,\ \lambda)\right\rangle.$$

证明 设

$$\psi_h(x)=\frac{\phi(x,\ \lambda+h)-\phi(x,\ \lambda)}{h}-\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(x,\ \lambda).$$

容易看出条件(i)和(ii)意味着在$C_c^\infty(\Omega)$内$\psi_h\to0$, 于是, 对每个$T\in D'(\Omega)$,

$$\left\langle T_x,\ \frac{\phi(x,\ \lambda+h)-\phi(x,\ \lambda)}{h}\right\rangle\to\left\langle T_x,\ \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(x,\ \lambda)\right\rangle\quad(h\to0).$$

证毕.

注 1. 引理3.1和3.2对只依赖于多个参数$(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_r)$的情形显然亦成立.

2. 在$T\in E'(\Omega)$以及$\phi(x,\ \lambda)$是$C^\infty(\Omega)$的函数族的情形下,有与引理3.1和3.2类似的引理.

定理3.1. 的证明 1. 设$u\in C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$. 由引理3.2,

$$\langle T_y,\ u(x,\ y)\rangle$$

是变量$x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$的C^∞函数,并且很明显,它在Ω内有紧支柱. 于是,我们可以将它应用于广义函数S_x,并得到"逐次积分"

$$\langle S_x,\ \langle T_y,\ u(x,\ y)\rangle\rangle.\tag{3.3}$$

用同样的方法能得到

$$\langle T_y,\ \langle S_x,\ u(x,\ y)\rangle\rangle.\tag{3.4}$$

2. 若$u(x,\ y)=\phi(x)\cdot\psi(y)$, 其中$\phi\in C_c^\infty(\Omega)$和$\psi\in C_c^\infty(\Omega')$,很明显地有

$$\langle S_x,\ \langle T_y,\ u(x,\ y)\rangle\rangle=\langle T_y,\ \langle S_x,\ u(x,\ y)\rangle\rangle$$
$$=\langle S,\ \phi\rangle\cdot\langle T,\ \psi\rangle.$$

于是这两个线性泛函(3.3)和(3.4)在$C_c^\infty(\Omega)\otimes C_c^\infty(\Omega')$上是一致的.

3. 最后,线性映射

$$u\in C_c^\infty(\Omega\times\Omega')\to\langle T_y,\ u(x,\ y)\rangle\in C_c^\infty(\Omega)\qquad(3.5)$$

是连续的. 事实上,这只要证明(我们把证明留给读者作为习题)它在$C_c^\infty(\Omega)\otimes C_c^\infty(\Omega')$上连续就可以了,这里,$C_c^\infty(\Omega)\otimes C_c^\infty(\Omega')$上装备的拓扑是由$C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$上的拓扑导出的. 由此便得到(3.3)和(3.4)都在$C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$上连续. 证毕.

直积的性质

1. $S\otimes T$的支柱等于S的支柱和T的支柱的笛卡儿积.

证明是容易的.

2. 双线性映射

$$(S,\ T)\in D'(\Omega)\times D'(\Omega)\to S\otimes T\in D'(\Omega\times\Omega')$$

对每一个变量是连续的.

证明 例如对第一个变量的连续性. 由

$$\langle S\otimes T,\ u\rangle=\langle S_x,\ \langle T_y,\ u(x,\ y)\rangle\rangle$$

并注意到(3.5)的连续性,即可得出. 证毕.

3. 对每个$p=(p_1,\ \cdots,\ p_n)$和$q=(q_1,\ \cdots,\ q_n)$,我们有

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial y^q}(S\otimes T)=\frac{\partial^p S}{\partial x^p}\otimes\frac{\partial^q T}{\partial y^q}.$$

证明是容易的.

2. 广义函数的卷积

在第1章的公式(1.5)内,我们曾经在一种特殊情形下定义了两个函数的卷积,其中一个函数是局部可积的,另一个是C^∞的函数并有紧支柱. 更一般地,若f和g是两个在$\mathbb{R}^n$内局部可积的函数,其中一个有紧支柱,它们的卷积定义为

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)dy.\qquad(3.6)$$

为了将卷积的定义拓广到广义函数的情形中去，我们把上面的式子解释为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函. 对每个 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\langle f*g,\ \phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)\phi(x)dx.$$

用上面两个积分中的一个代替 $f*g$ 并作变量替换，得

$$\begin{aligned}\langle f*g,\ \phi\rangle&=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)\phi(x)dx\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)g(\eta)\phi(\xi+\eta)d\xi\,d\eta\\&=\langle f(\xi)\otimes g(\eta),\ \phi(\xi+\eta)\rangle.\end{aligned}$$

于是，我们能按下面的泛函关系来重新定义 f 和 g 的卷积:

$$\langle f*g,\ \phi\rangle=\langle f(\xi)\otimes g(\eta),\ \phi(\xi+\eta)\rangle,\ \forall\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

但要注意到，因为 $\phi(\xi+\eta)$ 作为 $(\xi,\ \eta)$ 的函数在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 内并没有紧支柱，所以还必须给出最后那个括号的意义. 这将在更一般的场合下来考虑.

设 $S\in E'(\mathbb{R}^n)$, $T\in D'(\mathbb{R}^n)$. 若 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，它的支柱是 K，那么 $\phi(\xi+\eta)$ 的支柱是含在条状

$$\{(\xi,\ \eta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n:\xi+\eta\in K\}$$

内. 因为 S 的支柱是一个紧集，设为 L，由上面的性质 1 知道 $S\otimes T$ 的支柱是含在 $L\times\mathbb{R}^n$ 内，这就容易看出，交

$$\operatorname{supp}(S\otimes T)\cap\operatorname{supp}\phi(\xi+\eta)$$

是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 的紧子集 M. 设 $\alpha(\xi,\ \eta)$ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 的一个函数，在 M 上等于 1，定义

$$\begin{aligned}\langle S*T,\ \phi\rangle&=\langle S_\xi\otimes T_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle\\&=\langle S_\xi\otimes T_\eta,\ \alpha(\xi,\ \eta)\phi(\xi+\eta)\rangle.\end{aligned}$$

注意到由于 $\alpha(\xi,\ \eta)\phi(\xi,\ \eta)$ 有紧支柱，所以最后的括号是有意义的. 并且它的值与 α 的选取无关，这是因为 α 在 M 上是等于 1 的. 这一讨论表明下面的定义是合理的.

定义 3.1. 设 S, $T\in D'(\mathbb{R}^n)$ 并设其中至少一个有紧支柱. 由

$$\langle S*T,\ \phi\rangle=\langle S_\xi\otimes T_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle,\ \forall\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.7}$$

定义的卷积 $S*T$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的一个广义函数.

很明显，当$S=f$和$T=g$是两个局部可积函数并且至少一个有紧支柱时，这一新的定义是和古典定义(3.6)一致的.

以后将会看到，至少有一个广义函数必须有紧支柱的条件在一些情形下能够被取消. 粗略地说，当一个广义函数在无限远的增长可以被另一个的减少所补偿的时候，卷积仍可被确定.

我们将提出有关函数卷积的下列重要结果，便于将来引用：

(I) 设p, q和r都是实数，$1\leqslant p, q, r\leqslant+\infty$并且$r^{-1}=p^{-1}+q^{-1}-1$. 若$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, 则$f*g\in L^r(\mathbb{R}^n)$并且

$$\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q.$$

至于它的证明，读者可以参考 Treves[32, p. 278]或Zygmund[33]. 作为推论，我们有下列的：

(II) 设$p=1$, 对每个$f\in L^1$, 映射

$$g\in L^q\to f*g\in L^q$$

是连续线性的，它的范数$\leqslant\|f\|_1$.

(III) 双线性映射

$$L^1\times L^1\ni(f, g)\to f*g\in L^1$$

是连续的，并且有$\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\cdot\|g\|_1$.

卷积的性质

1. 设$S, T\in D'(\mathbb{R}^n)$，并设其中至少一个有紧支柱，则有

$$\operatorname{supp}(S*T)\subset\operatorname{supp}S+\operatorname{supp}T. \qquad (3.8)$$

证明 设$A=\operatorname{supp}S$, $B=\operatorname{supp}T$. 因为A和B都是闭集并且至少一个是紧的，所以集

$$A+B=\{x+y: x\in A, y\in B\}$$

是闭的. 现在我们证明$S*T$在开集$\Omega=(A+B)^c$上等于零. 事实上，若$\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi(\xi+\eta)$的支柱是含在开集

$$\{(\xi, \eta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n: \xi+\eta\in\Omega\}$$

内. 另一方面，我们已经知道$S\otimes T$的支柱是$A\times B$. 因为$(\xi, \eta)\in A\times B$表明$\xi+\eta\in A+B$, 所以$S\otimes T$的支柱不与$\phi(\xi+\eta)$的支柱相交；再由

$$\langle S*T,\ \phi\rangle=\langle S_\xi\otimes T_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle,\quad \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega)$$

便得出所要的结果．证毕．

2．双线性映射

$$(S,\ T)\in E'(\mathbb{R}^n)\times D'(\mathbb{R}^n)\to S*T\in D'(\mathbb{R}^n)$$

对每个变量连续．

它的证明，作为直积的性质 2 的推论，留给读者．

3．$E'(\mathbb{R}^n)$ 关于卷积是一个有单位元的可交换和可结合的代数．

证明　卷积显然是可交换的．

Dirac 测度 δ 是卷积的单位元．事实上，对所有 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，

$$\begin{aligned}\langle\delta*T,\ \phi\rangle&=\langle\delta_\xi\otimes T_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle\\&=\langle T_\eta,\ \langle\delta_\xi,\ \phi(\xi+\eta)\rangle\rangle=\langle T,\ \phi\rangle.\end{aligned}$$

设 $R,\ S,\ T\in D'(\mathbb{R}^n)$，并且其中至少两个有紧支柱．那么，卷积是可结合的并且

$$R*S*T=R*(S*T)=(R*S)*T. \tag{3.9}$$

事实上，由于对 $R,\ S,\ T$ 的支柱所作的假设，(3.9)的两边都是有意义的．若 ϕ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中一个任意元素，将(3.9)的两边作用于 ϕ，容易验证有相同的值

$$\langle R_\xi\otimes S_\eta\otimes T_\zeta,\ \phi(\xi+\eta+\zeta)\rangle.$$

4．卷积和平移．设 h 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个元素，f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 内的一个函数．ϕ 的平移是一个函数，定义为

$$(\tau_h\phi)(x)=\phi(x-h).$$

显然，若 $\phi\in C^\infty$(或 C_c)，则 $\tau_h\phi\in C^\infty$(或 C_c^∞)．我们用对偶来定义广义函数的平移：

$$\langle\tau_hT,\ \phi\rangle=\langle T,\ \tau_{-h}\phi\rangle,\ \forall\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

作为习题，读者可以证明对每个 $h\in\mathbb{R}^n$，τ_hT 是一个广义函数并且

$$\tau_h: D'(\mathbb{R}^n)\to D'(\mathbb{R}^n)$$

在强拓扑下是一个连续线性映射．

记 $\delta_{(h)}$ 是在点 $h\in\mathbb{R}^n$ 的 Dirac 测度，即

$$\langle\delta_{(h)},\ \phi\rangle=\phi(h),\ \forall\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

(我们令 $\delta_{(0)}=\delta$). 那么, 成立下面的性质:

$$\tau_h T=\delta_{(h)}*T,\ \forall T\in D'(\mathbb{R}^n). \tag{3.10}$$

事实上, 有

$$\langle\tau_h T,\ \phi\rangle=\langle T,\ \tau_{-h}\phi\rangle=\langle T_\xi,\ \phi(\xi+h)\rangle.$$

将 $\phi(\xi+h)$ 换为

$$\phi(\xi+h)=\langle(\delta_{(h)})_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle,$$

得

$$\begin{aligned}\langle\tau_h T,\ \phi\rangle&=\langle T_\xi,\ \langle(\delta_{(h)})_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle\rangle\\&=\langle T_\xi\otimes(\delta_{(h)})_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle=\langle\delta_{(h)}*T,\ \phi\rangle.\end{aligned}$$

证毕.

利用卷积的可交换性和可结合性, 作为(3.10)的推论, 我们能够获得下面的非常有用的公式

$$\tau_h(S*T)=(\tau_h S)*T=S*(\tau_h T). \tag{3.11}$$

5. 导数与卷积. 下列关系式成立:

$$\partial_k T=\partial_k\delta*T. \tag{3.12}$$

事实上, 我们有

$$\langle\partial_k T,\ \phi\rangle=-\langle T,\ \partial_k\phi\rangle.$$

而 $\qquad \partial_k\phi(x)=\langle\delta_y,\ \partial_k\phi(x+y)\rangle=-\langle(\partial_k\delta)_y,\ \phi(x+y)\rangle,$

作这一代换, 即得

$$\begin{aligned}\langle\partial_k T,\ \phi\rangle&=-\langle T_x,\ \partial_k\phi(x)\rangle=\langle T_x,\ \langle(\partial_k\delta)_y,\ \phi(x+y)\rangle\rangle\\&=\langle T_x\otimes(\partial_k\delta)_y,\ \phi(x+y)\rangle=\langle(\partial_k\delta)*T,\ \phi\rangle,\end{aligned}$$

对所有 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 成立. 证毕.

公式(3.12)表明(利用卷积的可结合性): 为了求卷积的微分, 只要求其中一个因子的微分, 即

$$\partial_k(S*T)=\partial_k S*T=S*\partial_k T. \tag{3.13}$$

3. 函数和广义函数的卷积; 正则性

设 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (或 $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), 又设 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$ (或 $T\in E'(\mathbb{R}^n)$). 则 T 和 ϕ 的卷积由下式给出:

$$(T*\phi)(x)=\langle T_\xi,\ \phi(x-\xi)\rangle. \tag{3.14}$$

事实上,对每个 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,由(3.7),有

$$\begin{aligned}\langle (T*\phi)(x),\ \psi(x)\rangle &= \langle T_\xi\otimes\phi(\eta),\ \psi(\xi+\eta)\rangle\\ &=\langle T_\xi,\ \langle\phi(\eta),\ \psi(\xi+\eta)\rangle\rangle.\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}\langle\phi(\eta),\ \psi(\xi+\eta)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\phi(\eta)\psi(\xi+\eta)\,d\eta\\ &=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x-\xi)\psi(x)\,dx=\langle\phi(x-\xi),\ \psi(x)\rangle.\end{aligned}$$

作适当的代换,可得

$$\begin{aligned}\langle (T*\phi)(x),\ \psi(x)\rangle &= \langle T_\xi,\ \langle\phi(x-\xi),\ \psi(x)\rangle\rangle\\ &=\langle\langle T_\xi,\ \phi(x-\xi)\rangle,\ \psi(x)\rangle.\end{aligned}$$ 证毕.

令 $$\check{\phi}(x)=\phi(-x).$$

利用这一记号,(3.14)可写为

$$(T*\phi)(x)=\langle T,\ \tau_x\check{\phi}\rangle. \tag{3.15}$$

我们还有

$$\langle T,\ \phi\rangle=(T*\check{\phi})(0). \tag{3.16}$$

定理3.2. 设 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ [或 $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$]并设 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$ [或 $T\in E'(\mathbb{R}^n)$]. 则

1. $(T*\phi)(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. 双线性映射

$$(\phi,\ T)\to T*\phi$$

从 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\times D'(\mathbb{R}^n)$ [或 $C^\infty(\mathbb{R}^n)\times E'(\mathbb{R}^n)$] 映射到 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内对每个变量是连续的.

证明 1. 因为

$$(T*\phi)(x)=\langle T_y,\ \phi(x-y)\rangle,$$

那么,由引理3.1,得出 $(T*\phi)(x)$ 是 x 的连续函数. 求导并利用(3.13)得知,对所有 $p=(p_1,\ \cdots,\ p_n)$,

$$\partial^p(T*\phi)=T*\partial^p\phi$$

是连续函数;于是,$T*\phi\in C^\infty$.

2. 为了证明映射

$$\phi \in C_c^\infty \to T*\phi \in C^\infty$$

是连续的，由命题 1.1，只要证明对每个紧子集 $K \subset \mathbb{R}^n$，映射

$$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; K) \to T*\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

是连续的．换句话说，对所有 $p \in \mathbb{N}^n$，所有 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 L，存在常数 $C>0$ 和整数 $m>0$ 使得

$$\sup_{x \in L} |\partial^p (T*\phi)(x)| \leqslant C \sup_{\substack{|q| \leqslant m \\ z \in K}} |\partial^q \phi(z)|.$$

而当 $x \in L$ 以及 $y \in K$ 时，显然 $(\tau_y \phi)(x) = \phi(x-y)$ 属于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; L-K)$．由于 $T \in D'$，故由定理 2.12，存在常数 $C>0$ 和整数 $l \geqslant 0$ 使得

$$|\langle T, \psi \rangle| \leqslant C \sup_{\substack{|r| \leqslant l \\ y \in \mathbb{R}^n}} |\partial^r \psi(y)|, \ \forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; L-K).$$

而 $\partial^p (T*\phi)(x) = (T*\partial^p \phi)(x) = \langle T_y, \partial^p \phi(x-y) \rangle$，使得

$$\sup_{x \in L} |\partial^p (T*\phi)(x)| = \sup_{x \in L} |\langle T_y, \partial^p \phi(x-y) \rangle|$$

$$\leqslant C \sup_{x \in L} \sup_{\substack{|r| \leqslant l \\ y \in \mathbb{R}^n}} |\partial_y^r \partial_x^p \phi(x-y)| \leqslant C \sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^n \\ |q| \leqslant l+|p|}} |\partial^q \phi(z)|,$$

这正是我们所要证明的．

3．设 ϕ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中一个固定的元素．容易看出，若 x 属于 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集 K，则函数集 $\{\tau_x \check{\phi} : x \in K\}$ 在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内有界．于是，若广义函数 T_j 强收敛于零，那么

$$(T_j*\phi)(x) = \langle T_j, \tau_x \check{\phi} \rangle$$

在 K 上一致收敛于零，求导并对所有 $p \in \mathbb{N}^n$ 利用(3.13)，同样得到函数

$$\partial^p (T_j*\phi)(x) = (T_j*\partial^p \phi)(x)$$

在 $\mathbb{R}^n$ 的任何紧子集 K 上一致收敛于零．于是在 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内 $T_j*\phi \to 0$．证毕．

注　与定理 3.2 的证明相仿，可以证明若 $T \in E'(\mathbb{R}^n)$，$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，则 $T*\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，并且双线性映射

$$(T, \phi) \in E'(\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to T*\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

对每个变量连续．

设
$$\alpha_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\alpha\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$$
是第1章第2节中所考虑的检验函数. 于是有下面的定理.

定理3.3. 若 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$ [或 $T\in E'(\mathbb{R}^n)$], 则当 $\varepsilon\to 0$ 时, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ [或 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$] 的函数 $T*\alpha_\varepsilon$ 在 $D'(\mathbb{R}^n)$ 内强收敛于 T.

证明以下面的引理为基础.

引理3.4. 若 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则当 $\varepsilon\to 0$ 时, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的函数 $\alpha_\varepsilon*\psi$ 在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内收敛于 ψ. 并且这一收敛在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的有界子集上是一致的.

证明 设 B 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内的有界集, 我们知道(定理1.3), 存在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 L 使得 $\operatorname{supp}\psi\subset L$, $\forall\psi\in B$, 并且 B 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; L)$ 的有界子集. 另一方面, 由定理1.1的(2), 存在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 K 使得 $L\subset K$, 并且对所有 $\psi\in B$ 和 $0<\varepsilon<1$,
$$\operatorname{supp}(\alpha_\varepsilon*\psi)\subset K.$$
因为, 按假设, B 在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内是有界的, 如同引理2.1那样我们能够证明对任何 $p=(p_1, \cdots, p_n)$, 集
$$\partial^p B=\{\partial^p\psi:\psi\in B\}$$
在 K 上一致等度连续. 于是, 给定一个非负整数 m 和一个实数 $\sigma>0$, 存在 $\delta>0$, 使得
$$|\partial^p\psi(x-y)-\partial^p\psi(x)|\leqslant\sigma$$
$\forall|y|\leqslant\delta$, $\forall\psi\in B$, $\forall x\in K$, 以及 $\forall|p|\leqslant m$ 成立.

现在考察 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; K)$ 内0的邻域
$$W(m, \sigma)=\{\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; K):|\partial^p\phi(x)|\leqslant\sigma, \forall x\in K, \forall|p|\leqslant m\}.$$
我们可以写出
$$(\alpha_\varepsilon*\partial^p\psi-\partial^p\psi)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\alpha_\varepsilon(y)(\partial^p\psi(x-y)-\partial^p\psi(x))dy.$$
设 $\varepsilon_0>0$ 充分小, 使对所有 $\varepsilon<\varepsilon_0$, 函数 α_ε 的支柱含在以原点为中

心 δ 为半径的球内. 这就得到对所有 $\psi\in B$, $|p|\leqslant m$, 和 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$,

$$|(\alpha_\varepsilon*\partial^p\psi-\partial^p\psi)(x)|\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\alpha_\varepsilon(y)|\partial^p\psi(x-y)-\partial^p\psi(x)|dy\leqslant\sigma.$$

换句话说,

$$\alpha_\varepsilon*\psi-\psi\in W(m,\ \sigma),\ \forall\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,\ \forall\psi\in B$$

这就证明了 $\varepsilon\to0$ 时, 在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$的有界子集上一致成立 $\alpha_\varepsilon*\psi\to\psi$. 证毕.

注　如果我们将 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 改为 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 引理 3.4 亦成立.

定理 3.3. 的证明　设 T 是 $D'(\mathbb{R}^n)$ 的一个固定的元素. 由(3.16)我们有

$$\begin{aligned}\langle T*\alpha_\varepsilon-T,\ \psi\rangle&=[(T*\alpha_\varepsilon)*\check{\psi}-T*\check{\psi}](0)\\&=[T*(\alpha_\varepsilon*\check{\psi})-T*\check{\psi}](0)=[T*(\alpha_\varepsilon*\check{\psi}-\check{\psi}](0)\\&=\langle T,\ \widecheck{\check{\alpha}_\varepsilon*\psi-\psi}\rangle.\end{aligned}$$

由引理 3.4, 当 $\varepsilon\to0$ 时, $\check{\alpha}_\varepsilon*\psi-\psi\to0$ 对 ψ 属于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的一个有界子集是一致的, 这表明

$$\langle T,\ \widecheck{\check{\alpha}_\varepsilon*\psi-\psi}\rangle\to0,$$

于是 $\varepsilon\to0$ 时 $T*\alpha_\varepsilon$ 在 $D'(\mathbb{R}^n)$ 内强收敛于 T. 对 $T\in E'(\mathbb{R}^n)$ 的情形, 证明是相同的. 证毕.

系　函数族 α_ε 在 $D'(\mathbb{R}^n)$ 的强拓扑内收敛于 Dirac 测度 δ.

证明　只要将定理 3.3 应用于 $T=\delta$, 并注意到 δ 是关于卷积的单位元. 证毕.

注　因为 $\delta\in E'(\mathbb{R}^n)$, 在 $E'(\mathbb{R}^n)$ 的强拓扑内也有 $\varepsilon\to0$ 时 $\alpha_\varepsilon\to\delta$.

按照第 1 章的定义 1.5, 我们曾称 (α_ε) 是函数的一个正则化族, 并称

$$\alpha_j(x)=j^n\alpha(jx),\quad j=1,\ 2,\ \cdots,$$

是函数的正则化序列. 在定理 1.1 中, 证明了可积函数在适当的拓扑内能够用光滑函数逼近. 定理 3.3 把这一结果拓广到了广义函数; 它允许我们用收敛的函数族(或序列)来代替广义函数(一般

是有奇性的)。

卷积映射

设 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$. 称连续线性映射

$$L_T:\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\to T*\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

是卷积映射. 对每个 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$, 能够确定一个这样的映射. 下面的定理给出了这种映射的特征.

定理3.4. 设 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$. 卷积映射 L_T 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内的一个连续线性映射, 并且和平移可以互相交换.

反之, 若 $L:C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续线性映射使得对每个 $h\in\mathbb{R}^n$ 有

$$L\circ\tau_h=\tau_h\circ L,$$

那么存在唯一的 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$L(\phi)=T*\phi,\ \forall\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

证明 设 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$. 由(3.14)有

$$[T*(\tau_h\phi)](x)=\langle T_y,\ (\tau_h\phi)(x-y)\rangle=\langle T_y,\ \phi(x-y-h)\rangle$$
$$=(T*\phi)(x-h)=[\tau_h(T*\phi)](x),$$

这就证明了卷积映射可以和平移互相交换.

反之, 设 $L:C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续线性映射并且可以和平移交换. 容易看出映射

$$\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\to(L\phi)(0)\in\mathbb{C}$$

定义出 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的一个连续线性泛函; 于是存在唯一的 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$(L\phi)(0)=(T*\phi)(0).$$

因为 L 和平移可以互相交换, 所以对任何 $x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$(L\phi)(x)=[\tau_{-x}(L\phi)](0)=[L(\tau_{-x}\phi)](0)$$
$$=(T*(\tau_{-x}\phi))(0)=\langle T_y,\ (\tau_{-x}\phi)(-y)\rangle$$
$$=\langle T_y,\ \phi(x-y)\rangle=(T*\phi)(x),$$

这表明 L 是一个卷积映射, 证毕.

注 若 $T\in E'(\mathbb{R}^n)$, 它定义了从 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内的一个

卷积映射．在这一情形，同样有相仿于定理 3.4 的特征．

习　题

1．证明函数族(ψ_λ)当 $\lambda\to\lambda_0$ 时在 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$内收敛于 0，其中(ψ_λ)是引理 3.1 的证明中所引出的．

2．对引理 3.2 的证明中所引出的函数族，回答上面的习题 1．

3．证明若 $T\in D'(\Omega\times\Omega')$[或 $E'(\Omega\times\Omega')$]，则线性映射

$u\in C_c^\infty(\Omega\times\Omega')$[或 $C^\infty(\Omega\times\Omega')$]$\to\langle T_y, u(x, y)\rangle\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$[或 $C^\infty(\Omega)$]

是连续的．

4．证明广义函数的直积的性质 1 和性质 3．

5．证明双线性映射

$$(S, T)\in E'(\mathbf{R}^n)\times D'(\mathbf{R}^n)\to S*T\in D'(\mathbf{R}^n)$$

对每个变量的连续性．

6．证明 τ_h 是从 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$[或 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$]到 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$[或 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$]上的同构．

7．证明公式(3.13)

8．在 $\phi\in C^\infty$ 和 $T\in E'$ 的情形下证明定理 3.2．

9．若 B 是 $C^1(\Omega)$内的有界集，证明 B 在 Ω 的每个紧子集上一致等度连续．

10．对 Radon 测度，给出并证明对应于引理 3.1 的论述．

11．设 $\mu\in M(\mathbf{R}^n)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 Radon 测度，又设 $\phi\in C_0(\mathbf{R}^n)$．证明

$$(\mu*\phi)(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\phi(x-y)dM(y)$$

是 $\mathbf{R}^n$ 内的一个连续函数．

12　若 $P(x)$是一个多项式，次数 $\leqslant m$，T 是一个有紧支柱的广义函数，证明 $P*T$ 仍旧是一个次数 $\leqslant m$ 的多项式．

13．考虑实直线上的下列广义函数：$R=1$，$S=\delta'$，$T=Y(x)$为 Heaviside 函数．证明在这一情形下公式(3.9)不成立．

14．设 $x=x(t)$是区间$(-1, 1)$的特征函数，计算 $x^{(*n)}=x*x*\cdots*x$(n 次)并求出它的支柱．

15．设 f 和 g 是 $\mathbf{R}$ 上的两个局部可积函数并且在 $\mathbf{R}_-=\{x\in R:x\leqslant0\}$ 上为 0．证明：(i) 卷积 $f*g$ 可以定义为

$$(f*g)(x)=\int_0^\infty f(x-y)g(y)dy;$$

(ii) $f*g$ 在 $\mathbf{R}_-$ 上为0；(iii) $f*g$ 是 $\mathbf{R}$ 上的局部可积函数．

第 4 章

缓增广义函数和它的 Fourier 变换

1. 在无限远处急速下降的无限可微函数空间

定义 4.1. 若 ϕ 属于 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$，并且对所有 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 和所有 $p\in\mathbb{N}^n$,

$$\lim_{|x|\to+\infty}|x^\alpha\partial^p\phi(x)|=0, \tag{4.1}$$

我们就说 ϕ *在无限远处急速下降*.

所有在无限远处急速下降的 C^∞ 函数组成一个 $\mathbb{C}$ 上的向量空间，记为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

容易验证条件(4.1)等价于下列任何一个条件：

对所有 α, $p\in\mathbb{N}^n$, $x^\alpha\partial^p\phi(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$上一致有界. (4.2)

对所有整数 $k\geqslant0$ 和所有 $p\in\mathbb{N}^n$, $(1+r^2)^{k/2}\partial^p\phi(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致有界，其中 $r=|x|$. (4.3)

例 1. 空间 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的一个向量子空间.

2. 函数 $\exp(-|x|^2/2)$属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

3. 设 $\alpha\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $\operatorname{supp}\alpha\subset B_1$, 并且 $\alpha(0)=1$. 又设(x_j)是 $\mathbb{R}^n$ 的一列元素，满足 $|x_j|+2\leqslant|x_{j+1}|$. 定义

$$r(x)=\sum_{j=1}^\infty\frac{\alpha(x-x_j)}{(1+|x_j|^2)^j}.$$

由于函数 $\alpha(x-x_j)$的支柱互不相交，所以这个和式是有意义的. 若 $k\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}^n$, 则有

$$(1+|x|^2)^k\partial^p r(x)=\frac{(1+|x|^2)^k\partial^p\alpha(x-x_j)}{(1+|x_j|^2)^k(1+|x_j|^2)^{j-k}},$$

其中 $|x_j|-1\leqslant|x|\leqslant|x_j|+1$. 另一方面，$(1+|x|^2)/(1+|x_j|^2)\leqslant C$, C 是一个适当的常数，且

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha\alpha(x-x_j)|=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^p\alpha(x)|.$$

这样便得到 $r\in S(\mathbb{R}^n)$.

命题 4.1. 设 $P(x)$ 是一个常系数的多项式，$Q(\partial)$ 是一个常系数偏微分算子，下列条件是等价的：(1) $\phi\in S$; (2) $\forall P(x)$ 和 $\forall Q(\partial)$, $P(x)Q(\partial)\phi\in S$; (3) $\forall P(x)$ 和 $Q(\partial)$, $Q(\partial)(P(x)\phi(x))\in S$.

证明 因为 $P(x)Q(\partial)\phi$ 可以写成形如(4.2)的 $x^\alpha\partial^p\phi(x)$ 的线性组合，所以由条件(1)显然可以推出条件(2). 另一方面，很明显，条件(2)又可推得条件(1).

由 Leibniz 公式 (1, 1) 知道，$Q(\partial)(P(x)\phi(x))$ 是 (4.2) 中 $x^\alpha\partial^p\phi(x)$ 的线性组合，于是由条件(1)可得条件(3). 最后，我们留给读者去证明条件(3)可推出条件(1). 证毕.

2. 缓增广义函数

在 $S(\mathbb{R}^n)$ 上定义半范

$$r_{\alpha,p}(\phi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^p\phi(x)|,\ \alpha,\ p\in\mathbb{N}^n.$$

这一族可列无限多个半范 $(r_{\alpha,p})$ 定义了 $S(\mathbb{R}^n)$ 上的 Hausdorff 局部凸拓扑，可以证明它是一个可距离化的完备的拓扑. 于是 $S(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Frechet 空间. 由(4.2)和(4.3)的等价性，$S(\mathbb{R}^n)$ 上的拓扑也可以由一列半范

$$r_{k,m}(\phi)=\sup_{|p|\leq m,\,x\in\mathbb{R}^n}|(1+r^2)^{k/2}\partial^p\phi(x)|,\ k,\ m\in\mathbb{N}$$

来定义.

S 是一个 Montel 空间. 事实上，若 B 是 S 的一个有界集，因为嵌入 $S\to C^\infty$ 是连续的（定理 4.2），所以 B 也是 C^∞ 的有界集. 又因为 C^∞ 是一个 Montel 空间，故 B 是 C^∞ 内的相对紧集. 为了证明 B 是 S 内的相对紧集，只要证明：如果 B 中的元素序列 (ϕ_j) 在 C^∞ 内收敛于 ϕ, 那么 $\phi\in S$ 并且在 S 内 $\phi_j\to\phi$. 因为 B 在 S 内有界，所以，对任何 $k\in\mathbb{N}$ 和任何 $p\in\mathbb{N}^n$, 存在常数 $C_{k,p}$ 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|(1+r^2)^{k/2}\partial^p f(x)|\leqslant C_{k,p},\quad f\in B.$$

而这一不等式意味着对给定的 $\varepsilon>0$, 存在常数 $M>0$ 使得

$$|(1+r^2)^{k/2}\partial^p f(x)|<\varepsilon,\quad r=|x|>M,\quad f\in B.$$

因为在 C^∞ 内 $\phi_j\to\phi$, 于是由上面的不等式即得

$$|(1+r^2)^{k/2}\partial^p\phi(x)|\leqslant\varepsilon,\quad r>M,$$

从而 $\phi\in S$. 另一方面, 因为在 C^∞ 内 $\phi_j\to\phi$, 故 $(\partial^p\phi_j)$ 在紧集 $\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leqslant M\}$ 上一致收敛于 $\partial^p\phi$. 而这表明, 对给定的 $\varepsilon>0$, 能够找到一个整数 j_0 使得对所有的 $|x|\leqslant M$ 和所有 $j\geqslant j_0$, 成立

$$(1+r^2)^{k/2}|\partial^p\phi_j(x)-\partial^p\phi(x)|\leqslant\varepsilon.$$

再由最后的三个不等式得到: 对所有 $j\geqslant j_0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+r^2)^{k/2}|\partial^p\phi_j(x)-\partial^p\phi(x)|\leqslant\varepsilon;$$

于是, 在 S 内 $\phi_j\to\phi$. 证毕.

作为上述命题的一个推论, S 是一个自反空间.

定理 4.1. S 中的序列 (ϕ_j) 在 S 内收敛于 0 当且仅当下列等价条件中有一个成立:

1. 对所有 α, $p\in\mathbb{N}^n$,

$$x^\alpha\partial^p\phi_j(x)\to 0\quad(j\to+\infty)$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致的.

2. 对所有常系数多项式 $P(x)$ 和所有常系数偏微分算子 $Q(\partial)$,

$$P(x)Q(\partial)\phi_j\to 0\quad(j\to+\infty)$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致的.

3. 对上面所说的所有 $P(x)$ 和 $Q(\partial)$,

$$Q(\partial)(P(x)\phi_j(x))\to 0\quad(j\to+\infty)$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致的.

它的证明容易由半范 $r_{\alpha,p}$ 的定义和命题 4.1 得出.

定理 4.2. 我们有下面的具有连续嵌入的包含关系:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\subset S(\mathbb{R}^n)\subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

并且, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 $S(\mathbb{R}^n)$ 的一个稠密子空间, $S(\mathbb{R}^n)$ 是 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的一

个稠密子空间.

证明 我们已经知道 (定理 2.16) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内稠密. 由此可得 $S(\mathbb{R}^n)$在 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内稠密.

设 $\beta_j\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 并且在以原点为中心以 j 为半径的闭球上 $\beta_j=1$. 若 $\phi\in S(\mathbb{R}^n)$, 那么 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$的函数序列$(\beta_j\phi)$在 $S(\mathbb{R}^n)$ 内收敛于 ϕ.

为了证明从 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$到 $S(\mathbb{R}^n)$内的恒等映射是连续的, 只要证明(命题 1.1)对 $\mathbb{R}^n$ 的每个紧子集 K, 从 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; K)$到 $S(\mathbb{R}^n)$内的恒等映射是连续的. 又因为它们都是可距离化的空间, 所以只要证明每一个在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; K)$ 内收敛于 0 的序列 (ϕ_j), 也必在 $S(\mathbb{R}^n)$ 内收敛于 0. 若在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; K)$ 内 $\phi_j\to 0$ $(j\to+\infty)$, 则对任何 $p\in\mathbb{N}^n$, $j\to+\infty$ 时,

$$\partial^p\phi_j(x)\to 0 \quad 在\ K\ 上是一致的.$$

因为每个 ϕ_j 的支柱都含在 K 内, 这就表明, 对 $\forall\alpha$, $p\in\mathbb{N}^n$, 序列

$$(x^\alpha\partial^p\phi_j)$$

当 $j\to+\infty$ 时在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 0.

最后, 设(ϕ_j) 是在 $S(\mathbb{R}^n)$ 内收敛于 0 的序列, 这表明对任何 $p\in\mathbb{N}^n$,序列$(\partial^\alpha\phi_j)$在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 0. 特别地,它在 $\mathbb{R}^n$ 的每个紧子集上一致收敛于 0. 证毕.

另一方面, 容易看出 $S(\mathbb{R}^n)\subset D'(\mathbb{R}^n)$ 有连续的嵌入. 由定义 2.9, $S(\mathbb{R}^n)$ 是广义函数的一个正则化空间, 于是它的对偶 $S'(\mathbb{R}^n)$ 是 $D'(\mathbb{R}^n)$的一个子空间.

定义 4.2. 称 $S'(\mathbb{R}^n)$的元素是*缓增广义函数*.

例 1. 由定理 4.2 我们立即得到在强拓扑意义下的连续嵌入 $E'(\mathbb{R}^n)\to S'(\mathbb{R}^n)\to D'(\mathbb{R}^n)$. 第一个嵌入表明每一个有紧支柱的广义函数是一个缓增广义函数, 所有有紧支柱的广义函数组成的空间是 $S'(\mathbb{R}^n)$ 的一个子空间.

2. 每个函数 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, 确定一个缓增广义函数 f 如下:

$$\langle f, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\phi\, dx, \quad \forall\phi\in S(\mathbb{R}^n).$$

事实上，由 Hölder 不等式，

$$|\langle f, \phi\rangle| \leqslant \|f\|_p \cdot \|\phi\|_q$$

$(p^{-1}+q^{-1}=1)$．注意到一个序列(ϕ_j)在 S 内收敛于 0，它也必定在 L^q 内收敛于 0，这样便得到每个 $f\in L^p$ 定义 S 上的一个连续线性泛函．并且，L^p 可以看作 S' 的一个向量子空间．

3．每一个常系数多项式 $P(x)$ 确定一个缓增广义函数．

事实上，这只要证明每个单项式 x^α 确定一个缓增广义函数如下：

$$\langle x^\alpha, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha\phi(x)dx, \quad \forall\phi\in S.$$

4．设 $f(x)$ 是一个连续函数，如果存在一个整数 $k\geqslant 0$，使得 $(1+r^2)^{k/2}f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 内有界，就说这个连续函数在无限远处是缓增的．或者，等价于下列条件：若存在一个多项式 $P(x)$ 使得 $|f(x)|\leqslant|P(x)|$，$\forall x\in\mathbb{R}^n$.

每个在无限远处缓增的连续函数 f 确定一个缓增广义函数．事实上，设

$$\langle f, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx, \quad \forall\phi\in S,$$

我们有

$$\begin{aligned}|\langle f, \phi\rangle| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\phi(x)|\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |(1+r^2)^{-k/2}f(x)\cdot(1+r^2)^{k/2}\phi(x)dx \\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |(1+r^2)^{k/2}\phi(x)|dx.\end{aligned}$$

注意到如果一个序列(ϕ_j)在 S 内收敛于 0，那么，对每个 $k\geqslant 0$，$((1+r^2)^{k/2}\phi_j)$ 在 L^1 内收敛于 0，这样便得得 f 确定 S' 的一个元素．

5．一个在无限远处缓增的连续函数 f，它的每个导数（在广义函数的意义下）确定一个缓增广义函数．设 $T=\partial^\alpha f$ 并定义

$$\langle T, \phi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot\partial^\alpha\phi(x)dx, \quad \forall\phi\in S,$$

于是

$$\begin{aligned}|\langle T, \phi\rangle| &\leqslant\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|\partial^\alpha\phi(x)|dx\\ &=\int_{\mathbb{R}^n} |(1+r^2)^{-k/2}f(x)(1+r^2)^{k/2}\partial^\alpha\phi(x)|dx\\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |(1+r^2)^{k/2}\partial^\alpha\phi(x)|dx,\end{aligned}$$

再一次注意到若一个序列 (ϕ_j) 在 S 内收敛于 0, 那么对任何 $k\geqslant0$ 以及任何 $\alpha\in\mathbb{N}^n$, 序列 $((1+r^2)^{k/2}\partial^\alpha\phi_j)$ 在 L^1 内收敛于 0. 因此, $T=\partial^\alpha f$ 确定了一个缓增广义函数.

反过来,我们在第 6 章将证明:每个缓增广义函数是某个在无限远处缓增的连续函数的导数. 这就是缓增广义函数这一名称的由来.

3. $S(\mathbb{R}^n)$ 内的 Fourier 变换

定义 4.3. 函数 $f\in S(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier 变换是下面的积分:

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi\rangle}f(x)dx, \tag{4.4}$$

这里 $\langle x, \xi\rangle=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$.

因为 $f\in S$, 故积分 (4.4) 绝对收敛. f 的 Fourier 变换也记为 Ff.

例 作为习题,读者可以证明函数

$$\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$$

的 Fourier 变换等于 $(2\pi)^{n/2}\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right)$.

性质 1. 设 $f\in S(\mathbb{R}^n)$. 则 ix_jf 的 Fourier 变换等于偏导数 $-\partial\hat{f}/\partial\xi_j$.

事实上, 将 (4.4) 的两端对 ξ_j 求导, 并注意到可以把求导移到

积分号内，便得

$$\frac{\partial \hat{f}(\xi)}{\partial \xi_j}=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial \xi_j}(e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(x))dx$$

$$=-\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}(ix_jf(x))dx=-\widehat{ix_jf}. \qquad \text{证毕.}$$

性质 2. 偏导数 $\partial f/\partial x_j$ 的 Fourier 变换等于 $i\xi_j\hat{f}$.

事实上，由分部积分，可得

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx$$

$$=i\xi_j\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(x)dx=i\xi_j\hat{f}. \qquad \text{证毕.}$$

如果我们利用记号

$$D_j=\frac{1}{i}\partial_j,\ 1\leqslant j\leqslant n,$$

那么由性质 1 和 2 得到

$$\widehat{x_jf}=-D_j\hat{f} \quad \text{和} \quad \widehat{D_jf}=\xi_j\hat{f}.$$

更一般地，若 $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$，有

$$\widehat{x^\alpha f}=(-D)^\alpha\hat{f} \quad \text{和} \quad \widehat{D^\alpha f}=\xi^\alpha\hat{f}.$$

同样，若

$$P(D)=\sum a_\beta D^\beta$$

是一个常系数偏微分算子，则

$$\widehat{P(D)f}=P(\xi)\cdot\hat{f}(\xi).$$

定理 4.3. Fourier 变换确定一个从 $S(\mathbb{R}^n)$ 到 $S(\mathbb{R}^n)$ 内的连续线性映射.

证明 由性质 1 和 2 推得

$$\xi^\alpha D^\beta\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}D^\alpha((-x)^\beta f(x))dx.$$

利用命题 4.1，$D^\alpha((-x)^\beta f(x))\in S(\mathbb{R}^n)$；于是由 (4.3)，对所有整数 $k\geqslant 0$,

$$(1+r^2)^k|D^\alpha((-x)^\beta f(x))|$$

在 $\mathbb{R}^n$ 内一致有界. 如果选取 k 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+r^2)^k} dx = C < +\infty,$$

那么就得到不等式

$$\begin{aligned}|\xi^\alpha D^p \hat{f}(\xi)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha(x^p f(x))| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+r^2)^k}(1+r^2)^k |D^\alpha(x^p f(x))| dx \\ &\leqslant C \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+r^2)^k |D^\alpha(x^p f(x))|.\end{aligned}$$

这就证明了对每个 α 和 p, $\xi^\alpha D^p \hat{f}(\xi)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 内一致有界; 于是 $\hat{f}\in S(\mathbb{R}^n)$. 另一方面,上述不等式还表明,根据定理 4.1,如果 (f_j) 是一个在 $S(\mathbb{R}^n)$ 内收敛于 0 的序列,那么 Fourier 变换 $(\hat{f}_j)$ 也是在 $S(\mathbb{R}^n)$ 内收敛于 0; 因此,

$$F: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$

是一个连续线性映射. 证毕.

Fourier 逆变换

若 $g\in S(\mathbb{R}^n)$, 积分

$$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} g(x)\, dx \tag{4.5}$$

是绝对收敛的, 并定义一个变量为 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 的 $S(\mathbb{R}^n)$ 中函数. 记积分 (4.5) 为

$$(F^{-1}g)(\xi),$$

可以证明,如同定理 4.3 一样, F^{-1} 确定一个从 $S(\mathbb{R}^n)$ 到 $S(\mathbb{R}^n)$ 内的连续线性映射.

下列关系是容易验证的:

$$\overline{Fg} = (2\pi)^n F^{-1}\bar{g} \quad 和 \quad F\bar{g} = (2\pi)^n \overline{F^{-1}g}. \tag{4.6}$$

定理 4.4. (Fourier 反演公式) 我们有

$$f = F^{-1}(Ff), \quad \forall f\in S.$$

证明 利用 Fubini 定理,可得下面的关系式:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i(x,\xi)} \left\{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\xi)} f(y)\, dy\right\} d\xi\end{aligned}$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} g(\xi) f(y) d\xi\, dy$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y-x) f(y) dy, \quad \forall f,\ g\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{4.7}$$

作变数代换，可以把(4.7)写成

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi=\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) f(x+y) dy. \tag{4.8}$$

用 $g(\varepsilon\xi)$ 代替 $g(\xi)$，它的 Fourier 变换等于 $\varepsilon^{-n}\hat{g}(y/\varepsilon)$. 再由变数代换得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\varepsilon\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi=\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) f(x+\varepsilon y) dy.$$

在上面的关系式中令 $\varepsilon\to 0$，就得到

$$g(0)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi=f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) dy. \tag{4.9}$$

现在取 $g(x)=\exp(-|x|^2/2)$ 并注意到

$$\hat{g}(y)=(2\pi)^{n/2}\exp\left(-\frac{|y|^2}{2}\right)$$

以及(Gauss 积分)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)dx=(2\pi)^{n/2},$$

我们得

$$(2\pi)^n f(x)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi) d\xi. \quad 证毕. \tag{4.10}$$

由定理 4.3 和 4.4 可得出下面的系.

系 Fourier 变换确定一个从 $S(\mathbb{R}^n)$ 到 $S(\mathbb{R}^n)$ 上的拓扑同构.

Fourier 变换的性质

(I) 若 $f,\ g\in S(\mathbb{R}^n)$，则有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}\cdot g=\int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\hat{g}. \tag{4.11}$$

事实上，只要在(4.8)中令 $x=0$ 即得. 证毕.

(II) Parseval 公式. 若 $f,\ g\in S(\mathbb{R}^n)$，则有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\bar{g}=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}\cdot\bar{\hat{g}}.$$

事实上，利用(I)，关系式(4.6)以及Fourier反演公式，可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} Ff\cdot\overline{Fg}=\int_{\mathbb{R}^n} f\cdot F(\overline{Fg})=(2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\overline{F^{-1}(Fg)}$$

$$=(2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\bar{g}.$$ 证毕.

(III) 卷积的 Fourier 变换. 若f, $g\in S(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\widehat{f*g}=\hat{f}\cdot\hat{g}.$$

证明 由Fubini定理可得

$$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}(f*g)(x)dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy\right\}dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-y,\xi\rangle}e^{-i\langle y,\xi\rangle}f(y)g(x-y)dxdy$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y,\xi\rangle}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-y,\xi\rangle}g(x-y)\,dx\right\}f(y)dy$$

$$=\hat{g}(\xi)\cdot\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y,\xi\rangle}f(y)dy=\hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi).$$ 证毕.

(IV) 乘积的 Fourier 变换. 若f, $g\in S(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\widehat{f\cdot g}=(2\pi)^{-n}\hat{f}*\hat{g}.$$

证明 利用Fourier反演公式和Fubini定理，得]

$$\widehat{f\cdot g}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(x)g(x)dx$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}g(x)\left\{\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\eta\rangle}\hat{f}(\eta)d\eta\right\}dx$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi-\eta\rangle}g(x)\hat{f}(\eta)dx\,d\eta$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi-\eta\rangle}g(x)dx\right\}\hat{f}(\eta)d\eta$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(\xi-\eta)\hat{f}(\eta)d\eta=(2\pi)^{-n}(\hat{f}*\hat{g})(\xi).$$

证毕.

4. 缓增广义函数的 Fourier 变换

在上一节里我们已经看到 Fourier 变换是一个从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的同构. 这就使我们可以利用对偶性来定义缓增广义函数的 Fourier 变换.

定义 4.4. 设 $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 它的 Fourier 变换是缓增广义函数 FT, 由下式定义:

$$\langle FT,\ \phi\rangle=\langle T,\ F\phi\rangle,\ \ \forall\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{4.12}$$

由 (4.12) 定义的从 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 内的映射事实上是同构 $F:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的转置算子. 当

$$T=f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

时, 由性质 I, (4.12) 中的定义和 (4.4) 中的定义是一致的, 因此我们用同一个记号 F 来表示 $\mathcal{S}$ 中元素的 Fourier 变换或者缓增广义函数的 Fourier 变换.

因为 $F:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是连续的, 这就得出 $F:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的强拓扑下也是连续的映射. 如同我们曾经对 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的函数的 Fourier 变换所作过的那样, 常常用 $\hat{T}$ 来表示 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的函数 T 的 Fourier 变换 FT.

同样地, 我们利用对偶性来定义缓增广义函数的 Fourier 逆变换:

$$\langle F^{-1}T,\ \phi\rangle=\langle T,\ F^{-1}\phi\rangle,\ \ \forall\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

显然, 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的强拓扑下 F^{-1} 是一个从 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 内的连续线性映射, 并且 Fourier 反演公式

$$T=F^{-1}(FT),\ \ \forall T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

成立. 因此, F 是一个从 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的同构.

在 Fourier 变换的古典理论中, 曾经证明了当 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 时,

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(x)\,dx$$

存在, 并且它仍旧属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$, 而映射

$$f\in L^2(\mathbb{R}^n)\to\hat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

是一个同构[2]. 另一方面，$L^2(\mathbb{R}^n)$是$S'(\mathbb{R}^n)$的一个子空间(上面的例2)，于是在广义函数的意义下，平方可积函数的Fourier变换也是存在的. 再由在古典情形下也正确的性质I，可知这两个概念实际上是一致的. 在缓增广义函数的范畴内我们将证明下面的定理.

定理4.5. 设$f\in L^2(\mathbb{R}^n)$，又设$\hat{f}$是f在广义函数意义下的Fourier变换. 则有

1. $\hat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

2. $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=(2\pi)^{n/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. (Parseval公式.)

证明 对所有$\phi\in S$，利用性质II，有

$$\begin{aligned}|\langle\hat{f},\ \phi\rangle|&=|\langle f,\ \hat{\phi}\rangle|\\&=\left|\int f\cdot\hat{\phi}\right|\leqslant\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\cdot\|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\&\leqslant(2\pi)^{n/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\cdot\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

这一不等式表明$\hat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$和

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant(2\pi)^{n/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\quad\forall f\in L^2(\mathbb{R}^n).\tag{4.13}$$

同样地，可以证明

$$\|F^{-1}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant(2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\quad\forall f\in L^2(\mathbb{R}^n).\tag{4.14}$$

再由不等式(4.13)和(4.14)得

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|F^{-1}(Ff)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant(2\pi)^{-n/2}\|Ff\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)};$$

于是

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=(2\pi)^{n/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

证毕.

以后我们将要用到关于可积函数的Fourier变换的下列古典结果.

命题4.2. 若$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\ \xi\rangle}f(x)dx$$

是$\xi\in\mathbb{R}^n$的一个连续函数.

证明 因为积分是绝对收敛的，所以$\hat{f}(\xi)$有意义. 估计

$$\hat{f}(\xi)-\hat{f}(\xi_0)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\ \xi_0\rangle}(e^{-i\langle x,\ \xi-\xi_0\rangle}-1)f(x)dx,$$

我们得到不等式

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)-\hat{f}(\xi_0)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x, \xi-\xi_0\rangle}-1|\,|f(x)|\,dx \\
&\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^n} \left|\sin\frac{\langle x, \xi-\xi_0\rangle}{2}\right| |f(x)|\,dx \\
&\leqslant 2\int_{|\xi|<A} \left|\sin\frac{\langle x, \xi-\xi_0\rangle}{2}\right| |f(x)|\,dx \\
&\quad +2\int_{|x|>A} |f(x)|\,dx,
\end{aligned}
$$

由此便得到：当取 $|\xi-\xi_0|$ 充分小时，$|\hat{f}(\xi)-\hat{f}(\xi_0)|$ 可以任意地小. 证毕.

5. 具有紧支柱的广义函数的 Fourier 变换

本节的目的是证明每个具有紧支柱的广义函数，其 Fourier 变换是 $\mathbb{R}^n$ 内的 C^∞ 函数，并且可以扩张成为复空间 $\mathbb{C}^n$ 的整解析函数.

设 $\zeta=(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个变元，其中 $\zeta_j=\xi_j+i\eta_j(1\leqslant j\leqslant n)$，$\xi_j$, $\eta_j\in\mathbb{R}^n$, $i=\sqrt{-1}$. 又设

$$
\frac{\partial}{\partial\zeta_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}-i\frac{\partial}{\partial\eta_j}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}+i\frac{\partial}{\partial\eta_j}\right),
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\zeta}=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial\zeta_n}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}=\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_n}\right).
$$

若 $p\in\mathbb{N}^n$, 记 $(\partial/\partial\zeta)^p=(\partial/\partial\zeta_1)^{p_1}\cdots(\partial/\partial\zeta_n)^{p_n}$.

定义 4.5. 设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个开子集，$\zeta_0\in U$. 如果函数 f: $U\to\mathbb{C}$ 能够表示为 $\zeta-\zeta_0$ 的幂级数

$$
f(\zeta)=\sum_p a_p(\zeta-\zeta_0)^p,
$$

这一级数在 ζ_0 的某个邻域内收敛，就称 f 在 ζ_0 点是全纯的. 如果 f 在 U 的每一点全纯，就称 f 在 U 内全纯. 一个在 $\mathbb{C}^n$ 内全纯的函数称为整函数.

一个等价的定义如下：U 上的 C^1 函数 f，如果满足 Cauchy-

Riemann 方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_j}=0,\ 1\leqslant j\leqslant n,$$

就称 f 在 U 内是全纯的. (见[3, 15].)

上述幂级数展开式中的系数 a_p 由

$$a_p=\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^p f(\zeta_0)$$

给出，也可用 Cauchy 积分公式得出. 设 $\zeta_0\in U$, 并考虑多维圆盘

$$D(r_1,\ \cdots,\ r_n)=\{\zeta\in\mathbb{C}^n: |\zeta_j-\zeta_j^0|\leqslant r_j,\ 1\leqslant j\leqslant n\},$$

我们假定它是含在 U 内的. 那么, 对所有 $p\in\mathbb{N}^n$, 有

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^p f(\zeta_0)$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1-\zeta_1^0|=r_1}\cdots\int_{|\zeta_n-\zeta_n^0|=r_n}\frac{f(\zeta)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-\zeta_1^0)^{p_1+1}\cdots(\zeta_n-\zeta_n^0)^{p_n+1}}$$

(见[3, 15]).

定义 4.6. 设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 内的开集, E 是一个拓扑向量空间. 如果函数 $f: U\to E$ 对每个 $\zeta_0\in U$ 能够表示为 $(\zeta-\zeta_0)$ 的幂级数, 其系数在 E 内, 并在 ζ_0 的某个邻域内收敛, 我们就称 f 在 U 内是全纯的.

一个在拓扑向量空间内取值的全纯函数, 常称为向量值全纯函数. 当 $U=\mathbb{C}^n$ 时, 称 f 为向量值整函数.

若 $f: U\to E$ 是一个向量值全纯函数, 那么对 E 的对偶 E' 内的每个元素 e', 由

$$f_{e'}(\zeta)=\langle f(\zeta),\ e'\rangle$$

定义的复值函数 $f_{e'}$ 在 U 内是全纯的. 事实上, 将算子 $\partial/\partial\bar{\zeta}_j$ 应用到上述关系式的两端, 注意到

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j}\langle f(\zeta),\ e'\rangle=\left\langle\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_j}(\zeta),\ e'\right\rangle$$

[32, 定理 27.1], 以及关于 f 是全纯的假设, 便得 $\partial f_{e'}/\partial\bar{\zeta}_j=0$, $1\leqslant j\leqslant n$, $\forall e'\in E'$.

一个向量值函数 $f:U\to E$，如果对每个 $e'\in E'$，使得复值函数 $f_{e'}$ 在 U 内是全纯的，则称它是 U 内的纯量全纯函数．刚才证明了每一个向量值全纯函数是纯量全纯的．我们还要指出，反过来，若 E 是复拓扑向量空间，那么 U 内的每一个纯量全纯函数(其值在 E 内)是一个向量值全纯函数．(见[13]．)

例 1．设 $x\in\mathbb{R}$，$\zeta=\xi+i\eta\in\mathbb{C}$．函数

$$\zeta\in\mathbb{C}\to e^{-ix\zeta}\in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

是 ζ 的整函数，其值在局部凸空间 $C^{\infty}(\mathbb{R})$ 内．事实上，对每个 $x\in\mathbb{R}$，

$$e^{-ix\zeta}=1+\frac{-ix\zeta}{1!}+\cdots+\frac{(-ix\zeta)^{n}}{n!}+\cdots$$

显然是 ζ 的整函数．并且，这一级数连同它关于变数 x 的所有导数，在 $\mathbb{R}$ 的每个紧子集上一致收敛．

2．更一般地，若 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\mathbb{C}^n$，和 $\langle x,\zeta\rangle=x_1\zeta_1+\cdots+x_n\zeta_n$，函数

$$\zeta\in\mathbb{C}^n\to e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

是一个 $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 值的整函数．

定理 4.6． 若 $T\in E'(\mathbb{R}^n)$，则它的 Fourier 变换是 $\mathbb{R}^n$ 内的一个 C^{∞} 函数，由下面的式子给出：

$$\hat{T}(\xi)=\langle T_x,\ e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle, \tag{4.15}$$

并且，$\hat{T}(\xi)$ 能够扩张到复空间 $\mathbb{C}^n$ 上成为一个整解析函数，后者由下式给出：

$$\hat{T}(\zeta)=\langle T_x,\ e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\rangle. \tag{4.16}$$

证明 1．首先我们注意到(4.15)的右端是有意义的，这是因为 T 是有紧支柱的广义函数，而 $e^{-i\langle x,\xi\rangle}$ 是关于 x 的 C^{∞} 函数．再由引理 3.2 后面的注 2 知道，(4.15)的右端是关于 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 的 C^{∞} 函数．

2．现在证明关系式(4.15)成立．设 (α_j) 是一个正则化序列．由定理 3.3 可知：在 E' 内，当 $j\to+\infty$ 时 $\alpha_j*T\to T$，于是，在 S' 内也如此；即在 S' 内也有 $\alpha_j*T\to T$．设 $\check{\alpha}_j(x)=\alpha_j(-x)$．由引理 3.4

的注，有

$$(\check{\alpha}_j * e^{-i\langle\cdot,\xi\rangle})(x) \to e^{-i\langle x,\xi\rangle}, \text{ 在 } C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ 内.}$$

因为 $T\in E'$，这就得到

$$\langle T_x,\ (\check{\alpha}_j * e^{-i\langle\cdot,\xi\rangle})(x)\rangle \to \langle T_x,\ e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle.$$

如果我们能够证明

$$\widehat{T*\alpha_j}(\xi) = \langle (T*\alpha_j)(x),\ e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle = \langle T_x,\ (\check{\alpha}_j * e^{-i\langle\cdot,\xi\rangle})(x)\rangle, \tag{4.17}$$

那么，令 $j\to+\infty$ 便得到(4.15)．接下去只要证明 (4.17) 就可以了．如我们已知，对每个 j，$T*\alpha_j$ 是一个有紧支柱的 C^∞ 函数；于是，它的 Fourier 变换是

$$\widehat{T*\alpha_j}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}(T*\alpha_j)(x)\,dx = \langle (T*\alpha_j)(x),\ e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle.$$

另一方面，由(3.14)，$(T*\alpha_j)(x) = \langle T_y,\ \alpha_j(x-y)\rangle$，并由定理 3.1，

$$\begin{aligned}\langle (T*\alpha_j)(x),\ e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle &= \langle\langle T_y,\ \alpha_j(x-y)\rangle,\ e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle \\ &= \langle T_y,\ \langle \alpha_j(x-y),\ e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle\rangle \\ &= \langle T_y,\ (\check{\alpha}_j * e^{-i\langle\cdot,\xi\rangle})(y)\rangle,\end{aligned}$$

由此便得(4.17)．

3．如上所说，函数

$$\zeta\in\mathbb{C}^n \to e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

是一个向量值整解析函数．另一方面，T 是 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的对偶的一个元素；于是，复值函数

$$\zeta\in\mathbb{C}^n \to \hat{T}(\zeta) = \langle T_x,\ e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\rangle \in C$$

是一个整解析函数．证毕．

定义 4.7． 广义函数 $T\in E'(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier-Laplace 变换是整解析函数

$$\hat{T}(\zeta) = \langle T_x,\ e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\rangle. \tag{4.16}$$

6. 广义函数和 C^∞ 函数的乘积

定义 4.8． 设 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$，$\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$．$\alpha$ 和 T 的乘积是广

义函数 αT，由下式定义：

$$\langle \alpha T,\ \varphi\rangle=\langle T,\ \alpha\varphi\rangle,\ \forall\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \qquad (4.18)$$

容易看出，当 T 是局部可积函数时，上面定义的乘积 αT 与通常的函数乘积是一致的.

但我们要注意，一般说来，定义两个广义函数 S 和 T 的乘积是不可能的. 事实上，若 $S=f$ 和 $T=g$ 都是局部可积函数，$f\cdot g$ 就不一定局部可积；于是这一乘积不一定能够确定为广义函数.

由定义 4.8 容易得到下列结果.

1. αT 的支柱含在 α 的支柱和 T 的支柱的交内.

2. 对每个 $1\leqslant j\leqslant n$，有

$$\partial_j(\alpha T)=\partial_j\alpha\cdot T+\alpha\partial_j T.$$

事实上，

$$\begin{aligned}\langle\partial_j(\alpha T),\ \phi\rangle&=-\langle\alpha T,\ \partial_j\phi\rangle=-\langle T,\ \alpha\partial_j\phi\rangle\\&=-\langle T,\ \partial_j(\alpha\phi)\rangle+\langle T,\ \partial_j\alpha\phi\rangle\\&=\langle\partial_j T,\ \alpha\phi\rangle+\langle T,\ \partial_j\alpha\phi\rangle\\&=\langle\alpha\partial_j T+\partial_j\alpha T,\ \phi\rangle,\ \forall\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

证毕.

我们还可以得到 Leibniz 公式

$$\partial^p(\alpha T)=\sum_{r+s=p}\frac{p!}{r!s!}\partial^r\alpha\partial^s T.$$

3. 双线性映射

$$C^\infty(\mathbb{R}^n)\times D'(\mathbb{R}^n)\ni(\alpha,\ T)\to\alpha T\in D'(\mathbb{R}^n)$$

对每个变量是连续的.

事实上，设在 D' 内 (T_j) 强收敛于 0. 若 B 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内的一个有界集，那么集 $\alpha B=\{\alpha\phi:\phi\in B\}$ 也是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内的有界集. 于是，

$$\langle\alpha T_j,\ \phi\rangle=\langle T_j,\ \alpha\phi\rangle\to 0$$

当 $\phi\in B$ 时是一致的；因此在 $D'(\mathbb{R}^n)$ 内 (αT_j) 强收敛于 0. 作为习题，我们留给读者去证明 αT 关于第一个变量是连续的. 同样

4. 若 $\alpha\in C_c^\infty$(或 C^∞)，$T\in D'$(或 E')，则 $\alpha T\in E'$ 并且映射

$$(\alpha,\ T)\in C_c^\infty\times D'(\text{或 } C^\infty\times E')\to\alpha T\in E'$$

对每个变量连续.

7. $S'(\mathbb{R}^n)$ 的乘子空间

设 $T\in S'$, 我们要问: 对 C^∞ 的函数 α 加上怎样的条件才能保证 $\alpha T\in S'$. 显然, 当 $\alpha\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时这总是成立的. 然而, 若 $\alpha(x)=\exp|x|^2$, 那么 $\alpha T\in S'$ 就不成立了, 这是因为指数函数在无限远处的增长是非常快的. 我们给出下列定义.

定义 4.9. 记 $O_M(\mathbb{R}^n)$ 是由满足下列条件的所有 $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 组成的空间: 对每个 $p\in\mathbb{N}^n$, 存在多项式 $P_p(x)$ 使得

$$|\partial^p\phi(x)|\leqslant|P_p(x)|,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n. \tag{4.19}$$

我们称 O_M 是在无限远处缓增的 C^∞ 函数的空间.

命题 4.3. 设 $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 下列条件互相等价:

1. 对每个 $p=(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{N}^n$, 存在多项式 $P_p(x)$ 使得

$$|\partial^p\phi(x)|\leqslant|P_p(x)|,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

2. 对所有 $f\in S$, 乘积 $\phi f\in S$.

3. 对每个 n 元数组 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ 和每个 $f\in S$, 函数 $\partial^p\phi\cdot f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 内有界.

证明 (1)⇒(2). 设 $p\in\mathbb{N}^n$. 由 Leibniz 公式, 有

$$\partial^p(\phi\cdot f)=\sum_{q\leqslant p}\frac{p!}{q!(p-q)!}\partial^q\phi\cdot\partial^{p-q}f.$$

于是 $$(1+r^2)^k\partial^p(\phi\cdot f)=\sum_{q\leqslant p}\frac{p!}{q!(p-q)!}\partial^q\phi\cdot(1+r^2)\partial^{p-q}f,$$

这里 k 是一个正实数. 因为 ϕ 满足条件 1, 故存在一个整数 $N>0$ 使得

$$|\partial^q\phi(x)|\leqslant C(1+r^2)^N,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall q\leqslant p.$$

作适当的代换, 可得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{|p|\leqslant m}|(1+r^2)^k\partial^p(\phi\cdot f)(x)|$$
$$\leqslant C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{|q|\leqslant m}|(1+r^2)^{k+N}\partial^q f(x)|. \tag{4.20}$$

再由于 $f\in S$, 上述不等式表明 $f\phi\in S$.

(2)⇒(3). 我们有

$$\partial_j\phi\cdot f=\partial_j(\phi\cdot f)-\phi\cdot\partial_j f,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

因为 $f\in S$, 那么, 由条件 2, $\phi\cdot\partial_j f\in S$; 于是 $\partial_j\phi\cdot f\in S$. 再由 Leibniz 公式和归纳法得 $\partial^p\phi\cdot f\in S$, $\forall p\in\mathbb{N}^n$; 于是条件 3 满足.

(3)⇒(1). 用反证法, 假设条件 1 不成立. 那么, 对某个 $p\in\mathbb{N}^n$, 任何多项式都不是 $|\partial^p\phi|$ 的界. 由归纳法, 我们可以找到 $\mathbb{R}^n$ 中的一个序列 (x_j) 使得 $|x_j+1|\geqslant|x_j|+2$ 并且 $|\partial^p\phi(x_j)|>(1+|x_j|^2)^j$. 设 $r\in S$ 是第 1 节例 3 中定义的函数. 显然有

$$|r(x_j)\partial^p\phi(x_j)|>\alpha(0)=1,\quad \forall j=1,2,\cdots,$$

这和条件 3 矛盾. 证毕.

O_M 的拓扑. 它是由一族半范

$$r_{f,p}(\phi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)\cdot\partial^p\phi(x)|$$

定义的局部凸拓扑, 其中 $f\in S(\mathbb{R}^n)$ 和 $p\in\mathbb{N}^n$. 显然这一拓扑不具有可列基. 同时, 可以证明 O_M 是一个完备空间.

一个序列 (或滤子) (ϕ_j) 在 O_M 内收敛于 0 当且仅当对每个 $f\in S$ 和每个 $p\in\mathbb{N}^n$, $(f(x)\cdot\partial^p\phi_j(x))$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 0. 或, 等价地, 对每个 $f\in S$, $(f\phi_j)$ 在 S 内收敛于 0.

由定义 4.9 和命题 4.3 知道一个集 B 在 O_M 内有界当且仅当对所有 $p\in\mathbb{N}^n$, 存在多项式 $P_p(x)$ 使得

$$|\partial^p\phi(x)|\leqslant P_p(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall\phi\in B.$$

命题 4.4. 双线性映射

$$O_M\times S\ni(\phi,f)\to\phi f\in S$$

对每个变量连续.

证明 1. 固定 $\phi\in O_M$. 由不等式 (4.20) 推断出线性映射

$$S\ni f\to\phi f\in S$$

是连续的.

2. 固定 $f\in S$ 并设 (ϕ_j) 是 O_M 的函数, 在 O_M 内 (ϕ_j) 收敛于 0. 那么, 对每个 $g\in S$ 和每个 $p\in\mathbb{N}^n$,

$$r_{g,p}(\phi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)\partial^p\phi_j(x)|\to 0.$$

设 k 是一个整数，q 是由 n 个非负整数组成的数组. 由 Leibniz 公式

$$\partial^q(f\cdot\phi_j)=\sum_{q'+q''=q}\frac{q!}{q'!q''!}\partial^{q'}f\cdot\partial^{q''}\phi_j;$$

于是

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|q|\leq m}}|(1+r^2)^k\partial^q(f\cdot\phi_j)|\leqslant\sum C_{q'q''}\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|q'|\leq m\\|q''|\leq m}}|(1+r^2)^k\partial^{q'}f\cdot\partial^{q''}\phi_j|.$$

因为 $(1+r^2)^k\partial^{q'}f\in S$，所以上述不等式右端的每一项在 O_M 内当 $\phi_j\to0$ 时趋于 0；因此，在 $S(\mathbb{R}^n)$ 内 $f\cdot\phi_j\to0$. 证毕.

注　如果 $\phi\in C^\infty$，使得对所有 $f\in S$ 有 $\phi f\in S$，那么，由命题 4.3，$\phi\in O_M$.

定理 4.7. 我们有下列具有连续嵌入的包含关系：

$$S(\mathbb{R}^n)\to O_M(\mathbb{R}^n)\to S'(\mathbb{R}^n).$$

并且，S 在 O_M 内稠密.

证明　对每个 $\phi\in O_M$，由

$$\langle\phi, f\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\phi f\,dx,\ \forall f\in S$$

确定一个缓增广义函数. 同时，明显地有 $S\subset O_M$. 设 (β_j) 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的一个序列，使得在 K_j 上 $\beta_j=1$，这里 $(K_j)_{j=1,2,\cdots}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一列增加的紧子集，其和是 $\mathbb{R}^n$. 这就容易得出，对所有 $\phi\in O_M$，在 O_M 内 $\beta_j\phi\to\phi$；于是 S 在 O_M 内稠密. 我们留给读者去证明嵌入的连续性. 证毕.

空间 O_M 是广义函数的一个正则空间(定义 2.9).

定义 4.10. 若 $\phi\in O_M$ 和 $T\in S'$，我们定义乘积 ϕT 为

$$\langle\phi T, f\rangle=\langle T, \phi f\rangle,\ \forall f\in S.$$

由命题 4.4，乘积 ϕT 属于 S'，并且还有下面的定理，它的证明留给读者.

定理 4.8. 双线性映射

$$O_M\times S'\ni(\phi, T)\to\phi T\in S'$$

对每个变量连续.

由命题 4.4 以及空间 S 的自反性得到，O_M 是 S' 的所有乘子的空间，即，我们有下列结果.

命题 4.5. 若 $\phi\in C^\infty$，使得对所有 $T\in S'$ 有 $\phi T\in S'$，那么 $\phi\in O_M$.

证明 我们的假设表明对每个 $f\in S$，映射

$$T\to\langle\phi T,\ f\rangle$$

是 S' 上的一个连续线性泛函. 因为 S 是自反空间，所以存在一个元素 $g\in S$ 使得

$$\langle\phi T,\ f\rangle=\langle T,\ g\rangle,\quad \forall T\in S'.$$

特别，
$$\langle\phi\alpha,\ f\rangle=\langle\alpha,\ g\rangle,\quad \forall\alpha\in C_c^\infty,$$

这意味着
$$\langle\alpha,\ \phi f\rangle=\langle\alpha,\ g\rangle,\quad \forall\alpha\in C_c^\infty;$$

于是，对所有 $f\in S$ 有 $\phi f=g\in S$. 再由命题 4.4 后面的注，我们得 $\phi\in O_M$. 证毕.

8. 缓增广义函数卷积的一些结果

在第 3 章第 3 节内，我们定义了 C^∞ 函数（或有紧支柱的 C^∞ 函数）和有紧支柱的广义函数（或广义函数）的卷积. 同样的定义可以推广到在无限远处急降的 C^∞ 函数和缓增广义函数的情形中去，即，若 $\phi\in S(\mathbb{R}^n)$，$T\in S'(\mathbb{R}^n)$，我们定义

$$(T*\phi)(x)=\langle T_y,\ \phi(x-y)\rangle.$$

与定理 3.2 的证明相仿，我们能够证明 $T*\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和双线性映射

$$S\times S'\ni(\phi,\ T)\to T*\phi\in C^\infty$$

对每个变量连续.

一般说来，$T*\phi\in S$ 不成立. 事实上，设 T 是 $\mathbb{R}^n$ 上恒等于 1 的函数. 则，

$$(T*\phi)(x)=\langle 1_y,\ \phi(x-y)\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)\,dy=C$$

是一个常数；于是 $T*\phi\notin S$. 然而，利用第 2 节最后所提到的缓增

广义函数的构造，可以证明下面的定理.

定理 4.9. 若 $\phi\in S$ 和 $T\in S'$，则 $\phi*T\in O_M$.

证明 若 $T\in S'$，则

$$T=\partial^p((1+r^2)^{k/2}f),$$

其中 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界连续函数(第 6 章，定理 6.5 的系). 由定义，我们有

$$\begin{aligned}(T*\phi)(x)&=\langle T_y,\ \phi(x-y)\rangle\\&=\left\langle\frac{\partial^p}{\partial y^p}(1+|y|^2)^{k/2}f(y),\ \phi(x-y)\right\rangle\\&=(-1)^{|p|}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{k/2}f(y)\frac{\partial^p\phi}{\partial y^p}(x-y)dy.\end{aligned}$$

利用不等式(见第 5 章，引理 5.2)

$$(1+|y|^2)^{k/2}\leqslant C(1+|x|^2)^{k/2}(1+|x-y|^2)^{k/2}$$

可得

$$\begin{aligned}|T*\phi(x)|&\leqslant C(1+|x|^2)^{k/2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x-y|^2)^{k/2}\left|\frac{\partial^p\phi}{\partial x^p}(x-y)\right|dy\\&\leqslant C'(1+|x|^2)^{k/2}.\end{aligned}$$

同样地，可得

$$|\partial^q(T*\phi)|\leqslant C_q(1+|x|^2)^{k/2},\quad \forall q\in\mathbb{N}^n;$$

于是，由命题 4.3, $T*\phi\in O_M$. 证毕.

定理 4.10. 若 $S\in S'$ 和 $T\in E'$，则 $S*T\in S'$. 此外，双线性映射

$$S'\times E'\ni(S,\ T)\to S*T\in S'$$

对每个变量连续.

其证明要用到下列引理.

引理 4.1. 若 $T\in E'$, $\phi\in S$，则函数

$$\psi(\xi)=\langle T_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle$$

属于 S. 并且，若在 S 内 ϕ 收敛于 0，则在 S 内 ψ 也收敛于 0.

证明 因为由定理 2.22，每一个有紧支柱的广义函数 T，都可以写成某些连续函数的导数的有限和，而这些连续函数都有紧支柱，且它们的紧支柱都含在 T 的支柱的一个任意邻域内. 所

以，为了证明引理只要证明当

$$T=\partial^q G,$$

且 G 是 $\mathbb{R}^n$ 内的一个连续函数时，其支柱含在 T 的支柱的一个任意的邻域内。

因为 $\psi(\xi)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的一个 C^∞ 函数（见引理 3.2 的注），所以只要去证明 $\psi(\xi)$ 在无限远处是急降的。我们有

$$\psi(\xi)=\langle T_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle=(-1)^{|q|}\int_{\mathbb{R}^n} G(\eta)\ \frac{\partial^q\phi}{\partial\eta^q}(\xi+\eta)\,d\eta;$$

于是，

$$\begin{aligned}&(1+|\xi|^2)^{k/2}\,\frac{\partial^p\psi}{\partial\xi^p}(\xi)\\&\quad=(-1)^{|q|}\int_{\mathbb{R}^n} G(\eta)\,(1+|\xi|^2)^{k/2}\,\frac{\partial^{p+q}\phi}{\partial\xi^p\partial\eta^q}(\xi+\eta)\,d\eta.\end{aligned}$$

再利用不等式（见第 5 章引理 5.2——译注）

$$1+|\xi|^2\leqslant 2\cdot(1+|\eta|^2)\,(1+|\xi+\eta|^2),$$

我们能够估计前面的表示式如下：

$$\begin{aligned}&\left|(1+|\xi|^2)^{k/2}\,\frac{\partial^p\psi}{\partial\xi^p}(\xi)\right|\\&\leqslant 2\cdot\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta|^2)^{k/2}|G(\eta)|\,(1+|\xi+\eta|^2)^{k/2}\,\frac{\partial^{p+q}\phi}{\partial\xi^p\partial\eta^q}(\xi+\eta)\,d\eta;\end{aligned}$$

于是，再注意到 G 是一个有紧支柱的连续函数，可得到不等式

$$\begin{aligned}&\sup_{|p|\leqslant m}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|(1+|\xi|^2)^{k/2}\,\frac{\partial^p\psi}{\partial\xi^p}(\xi)\right|\\&\qquad\leqslant C\cdot\sup_{|s|\leqslant l}\ \sup_{\zeta\in\mathbb{R}^n}\left|(1+|\zeta|^2)^{k/2}\,\frac{\partial^s\phi}{\partial\zeta^s}(\zeta)\right|\end{aligned}$$

这就证明了 $\psi\in S$ 以及它在 S 内连续地依赖于 ϕ. 证毕。

注 回想到

$$(T*\phi)(x)=\langle T_y,\ \phi(x-y)\rangle,$$

同上述引理的证明相仿，我们可以证明：若 $T\in E'$, $\phi\in S$, 则 $T*\phi\in S$.

定理 4.10. 的证明 1. 设 $S\in S'$, $T\in E'$, 以及 $\phi\in S$. 如同

定理 3.2 的证明那样,可以证明

$$\langle S_\xi,\ \phi(\xi+\eta)\rangle$$

是 η 的无限可微函数并且连续地依赖于 $\phi\in S$. 因此

$$\langle T_\eta,\ \langle S_\xi,\ \phi(\xi+\eta)\rangle\rangle \tag{4.21}$$

有意义,并且连续地依赖于 $\phi\in S$. 由引理 4.1, 函数

$$\phi(\xi)=\langle T_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle$$

属于 S 并且连续地依赖于 $\phi\in S$. 因为 $S\in S'$, 所以

$$\langle S_\xi,\ \langle T_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle\rangle \tag{4.22}$$

有意义,并且连续地依赖于 $\phi\in S$. 另一方面,因为(4.21)和(4.22)在 $\phi\in C_c^\infty$ 时是一致的(见卷积的定义), 以及 C_c^∞ 在 S 内稠密(定理 4.2),所以在 S 内它们是处处一致的.于是,对所有 $\phi\in S$, 得到

$$\langle S*T,\ \phi\rangle=\langle S_\xi\otimes T_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle$$
$$=\langle S_\xi,\ \langle T_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle\rangle=\langle T_\eta,\ \langle S_\xi,\ \phi(\xi+\eta)\rangle\rangle;$$

因此 $S*T\in S'$.

2. 固定 $T\in E'(\mathbb{R}^n)$, 并设广义函数序列 S_j 在 $S'(\mathbb{R}^n)$ 内强收敛于 0. 对所有 $\phi\in S$, 我们有

$$\langle S_j*T,\ \phi\rangle=((S_j*T)*\check{\phi})(0)=T*(S_j*\check{\phi})(0). \tag{4.23}$$

上面已经指出, S 的函数和 S' 的广义函数的卷积对每个变量是连续的;于是,在 C^∞ 内 $S_j*\check{\phi}\to 0$. 并且,能够证明(习题 14), 只要 φ 属于 S 的有界集, $S_j*\check{\phi}$ 就一致收敛于 0. 于是推得, 在 C^∞ 内 $T*(S_j*\check{\phi})$ 关于 ϕ (属于 S 的有界集)一致收敛于 0. 这表明,注意到(4.23),当 S_j 在 S' 内强收敛于 0 时, S_j*T 在 S' 内也强收敛于0.

相仿地,读者可以证明 $S*T$ 关于 T 的连续性. 证毕.

回到 Fourier 变换,我们证明下列结果.

定理 4.11. 若 $\phi\in S$ 和 $T\in S'$, 则

$$\widehat{\phi*T}=\hat{\phi}\cdot\hat{T}. \tag{4.24}$$

证明 由定理 4.9, $\phi*T\in O_M$, 再由定理 4.7, $\phi*T\in S'$; 于是, $\phi*T$ 的 Fourier 变换有意义并且属于 S'. 另一方面, $\hat{\phi}\in S\subset O_M$ 和 $\hat{T}\in S'$; 于是由定理 4.8, $\hat{\phi}\hat{T}\in S'$. 剩下来要证明的是

(4.24)的两端相等.

对所有 $\phi\in S$, 我们有

$$\langle \widehat{\phi * T}, \psi\rangle=\langle \phi * T, \hat{\psi}\rangle=\langle \phi(\xi)\otimes T(\eta), \hat{\psi}(\xi+\eta)\rangle$$
$$=\langle T_\eta, \langle \phi(\xi), \hat{\psi}(\xi+\eta)\rangle\rangle,$$

在积分$\langle \phi(\xi), \hat{\psi}(\xi+\eta)\rangle$中作变数代换便得到

$$\langle T_\eta, \langle \phi(\xi), \hat{\psi}(\xi+\eta)\rangle\rangle=\langle T_\eta, \langle \phi(\xi-\eta), \hat{\psi}(\xi)\rangle\rangle.$$

另一方面,

$$\langle \phi(\xi-\eta, \hat{\psi}(\xi)\rangle=\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi-\eta)\hat{\psi}(\xi)d\xi=(\check{\phi}*\hat{\psi})(\eta),$$

容易验证 $\check{\phi}=F(F^{-1}\check{\phi})=(2\pi)^{-n}\hat{\hat{\phi}},$

其中 $\hat{\hat{\phi}}=F(F\phi)$. 作适当的代换, 由第 3 节性质 IV,

$$\langle \phi(\xi-\eta), \hat{\psi}(\xi)\rangle=(2\pi)^{-n}(\hat{\hat{\phi}}*\hat{\psi})=(\widehat{\hat{\phi}\cdot\psi})(\eta),$$

于是, 我们可以写出

$$\langle \widehat{\phi * T}, \psi\rangle=\langle \phi * T, \hat{\psi}\rangle=\langle T_\eta, (\hat{\hat{\phi}}*\hat{\psi})(\eta)\rangle$$
$$=\langle T_\eta, (\widehat{\hat{\phi}\cdot\psi})(\eta)\rangle=\langle \hat{T}, \hat{\phi}\cdot\psi\rangle=\langle \hat{\phi}\hat{T}, \psi\rangle.$$ 证毕.

9. Paley–Wiener–Schwartz 定理

定理 4.12. 1. 在 $\mathbb{R}^n$ 内有紧支柱的广义函数 T 的 Fourier–Laplace 变换是 $\mathbb{C}^n$ 内的整函数 $F(\zeta)$, 满足下列性质:

(P_1)存在常数 C 和 A 以及一个整数 $N\geqslant 0$ 使得

$$|F(\zeta)|\leqslant C(1+|\zeta|)^N e^{A|\mathrm{Im}\,\zeta|}, \ \forall\, \zeta\in\mathbb{C}^n. \tag{4.25}$$

反过来, $\mathbb{C}^n$ 内每个满足性质 (P_1) 的整函数是某个属于 $E'(\mathbb{R}^n)$ 的广义函数的 Fourier–Laplace 变换.

2. 在 $\mathbb{R}^n$ 内有紧支柱的无限可微函数的 Fourier–Laplace 变换是 $\mathbb{C}^n$ 内的整函数 $F(\zeta)$, 且满足下列性质:

(P_2)存在常数 $A>0$, 对每个整数 $N\geqslant 0$, 能够找到一个常数 C 使得

$$|F(\zeta)|\leqslant C(1+|\zeta|)^{-N} e^{A|\mathrm{Im}\,\zeta|}, \ \forall\zeta\in\mathbb{C}^n. \tag{4.26}$$

反过来，$\mathbb{C}^n$ 内每个满足性质 (P_2) 的整函数是某个在 $\mathbb{R}^n$ 内有紧支柱的 C^∞ 函数的 Fourier-Laplace 变换。

证明 (i) 设

$$F(\zeta)=\langle T_x,\ e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\rangle$$

是广义函数 $T\in E'(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier-Laplace 变换. 由定理 2.14, 存在常数 $C>0$, 整数 $N\geqslant 0$ 和 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 K 使得

$$|\langle T,\ \phi\rangle|\leqslant C\cdot\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant N\\ x\in K}}|D^\alpha\phi|,\quad \forall\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{4.27}$$

设 A 是一个正实数，使得紧子集 K 含在闭球

$$\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leqslant A\}$$

内，又设

$$\phi_\zeta(x)=e^{-i\langle x,\zeta\rangle}.$$

于是有

$$|D^\alpha\phi_\zeta(x)|\leqslant|\zeta|^{|\alpha|}e^{\langle x,\eta\rangle},$$

因而

$$\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant N\\ |x|\leqslant A}}|D^\alpha\phi_\zeta(x)|\leqslant\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant N\\ |x|\leqslant A}}|\zeta|^{|\alpha|}e^{\langle x,\eta\rangle}\leqslant(1+|\zeta|)^N\cdot e^{A|\eta|}. \tag{4.28}$$

由不等式(4.27), (4.28)连同 $F(\zeta)$的定义，便得出不等式(4.25).

(ii) 现在设 $F(\zeta)$ 是函数 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier-Laplace 变换. 再设 $A>0$ 使得 ϕ 的支柱含在以原点为中心以 A 为半径的闭球内. 对每个由非负整数组成的 n 元数组 $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$, 我们能够写出

$$\zeta^\alpha\hat{\phi}(\zeta)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\zeta\rangle}D^\alpha\phi(x)\,dx.$$

由这一关系式我们立即得到不等式

$$|\zeta^\alpha\hat{\phi}(\zeta)|\leqslant C\cdot e^{A|\eta|},$$

这表明对每个整数 $N\geqslant 0$ 有不等式

$$(1+|\zeta|^2)^{N/2}|\hat{\phi}(\zeta)|\leqslant C\cdot e^{A|\eta|}. \tag{4.29}$$

最后，利用不等式

$$0<C_0\leqslant\frac{(1+|\zeta|^2)^{N/2}}{(1+|\zeta|)^N}\leqslant C_0$$

我们就可以看到(4.29)等价于(4.26).

(iii) 反过来，假设性质(P_2)成立，并定义

$$f(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}F(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi,$$

即，$f(x)$是 $F(\xi)$ 的 Fourier 逆变换，$\xi\in\mathbb{R}^n$. 由(4.26) 知道上述积分是绝对收敛的. 同时，由同一个不等式(4.26)得知积分

$$D^\alpha f(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}F(\xi)\xi^\alpha e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi$$

绝对收敛. 因此，$f(x)$是 $\mathbb{R}^n$ 内无限可微函数. 下面我们证明 f 有紧支柱. 设 $\eta=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$是 $\mathbb{R}^n$ 中任意固定的一点. 因为，由假设，$F(\zeta)$是整函数并满足不等式(4.26)，所以，还可以写出

$$f(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}F(\xi+i\eta)e^{i\langle x,\xi+i\eta\rangle}d\xi,$$

这里的积分是绝对收敛的. 取 $N=n+1$. 利用(4.26)，得

$$|f(x)|\leqslant(2\pi)^{-n}C\cdot e^{-\langle x,\eta\rangle+A|\eta|}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{-n-1}d\xi;$$

于是
$$|f(x)|\leqslant C'e^{A|\eta|-\langle x,\eta\rangle}.$$

如果在上述不等式中令 $\eta=tx$，便得

$$|f(x)|\leqslant C'\cdot\exp[-t(|x|^2-A|x|)].$$

再令 $t\to+\infty$，这一不等式表明：当 $x\in\mathbb{R}^n$ 的范数大于 A 时 $f(x)$必等于 0. 这样一来，$f(x)$的支柱含在以原点为中心以 A 为半径的闭球内.

(iv) 最后，设 $F(\zeta)$是 $\mathbb{C}^n$ 内的整函数且满足性质 (P_1). 那么，由(4.25)知道$F(\xi)$，$\xi\in\mathbb{R}^n$，是一个在无限远处缓增的函数；于是，它在 $\mathbb{R}^n$ 内确定了一个缓增广义函数，它的 Fourier 逆变换，正如我们已经知道的，是 $S'(\mathbb{R}^n)$ 的一个元素. 我们要证明 T 在 $\mathbb{R}^n$ 内有紧支柱. 为此，设 (α_j)，$j=1, 2, \cdots$，是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内的正则化序列，使得 α_j 的支柱含在以原点为中心以 j^{-1} 为半径的球内. 由定理 4.11，有

$$\widehat{T*\alpha_j}=\hat{T}\cdot\hat{\alpha}_j.$$

由假设，$\hat{T}=F(\zeta)$满足(4.25)，而每个 $\hat{\alpha}_j$ 又满足(4.26)，这样便得到每个 $\hat{T}\cdot\hat{\alpha}_j$ 是 $\mathbb{C}^n$ 内的一个整函数并且满足一个形如(4.26)的不等式，其中常数 A 应换为 $A+j^{-1}$. 于是 $T*\alpha_j$ 是一个无限可微的

函数并且有紧支柱，其紧支柱含在以原点为中心以 $A+j^{-1}$ 为半径的球内．因此，作为序列 $(T*\alpha_j)$ 的极限的广义函数 T 也必有紧支柱，其紧支柱含在以原点为中心以 A 为半径的球内．证毕．

系 1. 若 $T\in E'(\mathbb{R}^n)$，那么它的 Fourier 变换是一个无限可微的并在无限远处缓增的函数．

证明 在 (4.25) 中令 $|I_m\zeta|=0$，这一断言就成为 (4.25) 的一个平凡的结果．证毕．

系 2. 设 $T\in S'(\mathbb{R}^n)$，则下列条件等价：

(i) T 有紧支柱，其紧支柱含在闭集

$$\{x\in\mathbb{R}^n: |x_j|\leqslant A_j,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$$

内．

(ii) T 的 Fourier-Laplace 变换 $F(\zeta)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 内的一个整函数，使得对任何 $\varepsilon>0$，存在常数 C_ε 和整数 $N\geqslant 0$，有

$$|F(\zeta)|\leqslant C_\varepsilon(1+|\xi|)^N\exp[(A_1+\varepsilon)|\eta_1| + \cdots + (A_n+\varepsilon)|\eta_n|]. \tag{4.30}$$

其证明是定理 4.12 的证明的一个变形，留给读者作为练习．我们给出下面的定义．

定义 4.11. 一个 $\mathbb{C}^n$ 内的整函数 $f(\zeta)$，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在常数 $C_\varepsilon>0$ 使得对 $\zeta\in\mathbb{C}^n$ 有

$$|f(\zeta)|\leqslant C_\varepsilon\exp[(A_1+\varepsilon)|\zeta_1|+\cdots+(A_n+\varepsilon)|\zeta_n|], \tag{4.31}$$

就称 f 是指数型 $(A_1, \cdots, A_n)$ 的．

有紧支柱的广义函数的 Fourier-Laplace 变换是指数型的整函数．

10. 两个广义函数的卷积的 Fourier 变换

我们已经看到(第 3 节，性质 III)，Fourier 变换 F 将两个 S 的函数的卷积变换为它们的 Fourier 变换的乘积．定理 4.11 又表明，当 $\phi\in S$ 和 $T\in S'$ 时，$\phi*T$ 的 Fourier 变换等于乘积 $\hat{\phi}\cdot\hat{T}$．现在我们把这一结果拓广到缓增广义函数和具有紧支柱的广义函

数之间的卷积上去，有下面的定理.

定理 4.13. 若 $S\in S'$ 和 $T\in E'$，则

$$\widehat{T*S}=\hat{T}\cdot\hat{S}. \tag{4.32}$$

证明 由定理 4.10，$T*S\in S'$. 因为 $T\in E'$，再由 Peley-Wiener-Schwartz 定理，$\hat{T}\in O_M$，于是，$\hat{T}\cdot\hat{S}$ 有意义并且属于 S'(定理 4.8). 为了证明(4.32)的两端相等，我们将利用正则化序列.

设 (α_j) 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内的一个序列，并且在 E' 内当 $j\to+\infty$ 时收敛于 δ. 由定理 3.3，函数列

$$\phi_j=\alpha_j*T\in C_c^\infty$$

在 E' 内收敛于 T. 再由定理 4.10，在 S' 内 $\phi_j*S\to T*S$；于是，作 Fourier 变换，并利用定理 4.11 的结果，有

$$\widehat{T*S}=\lim\widehat{\phi_j*S}=\lim\hat{\phi}_j\cdot\hat{S}. \tag{4.33}$$

另一方面，因为在 E' 内 $\phi_j=\alpha_j*T\to T$，又因为 E' 到 S' 内的嵌入是连续的（定理 4.2），所以在 S' 内也有 $\phi_j\to T$. 于是，作 Fourier 变换，那么在 S' 内 $\hat{\phi}_j\to\hat{T}$. 但函数 $\hat{\phi}_j$ 和 $\hat{T}$ 都属于 O_M，并且在 O_M 内 $\hat{\phi}_j\to\hat{T}$. 事实上，这只要去证明（见习题 16）对所有 $\hat{f}\in O_M$，在 S 内有 $\hat{\phi}_j\cdot\hat{f}\to\hat{T}\cdot\hat{f}$，或等价地，由 Fourier 变换，在 S 内有 $\phi_j*f\to T*f$，而这是引理 4.1 的注的一个平凡的结果. 因此，由定理 4.8，我们有

$$\hat{T}\cdot\hat{S}=\lim\hat{\phi}_j\cdot\hat{S}, \tag{4.34}$$

其中的极限是在 S' 内取的. 关系式(4.33)和(4.34)给出了(4.32). 证毕.

注 定理 4.13 并不是一个最好的结果，这是因为可以证明一个更一般的定理，而在其证明中不须要借用 Peley-Wiener-Schwartz 定理. 在第 6 章中，我们将定义空间 O_c'，它在讨论缓增广义函数的卷积中所起的作用如同空间 O_M 在讨论缓增广义函数的乘积中所起的作用一样. 我们将看到 F 是一个从 O_M 到 O_c' 上的一一映射，反之亦然，并且 F 将 O_c' 内的函数与缓增广义函数的卷积变换为 O_M 中的一个元素与缓增广义函数的乘积.

习　题

1. 证明条件(4.1), (4.2)和(4.3)的等价性.

2. 证明空间 S 是完备的.

3. 证明定理4.1.

4. 证明: B 是 S 内的一个有界子集当且仅当对所有常系数多项式 $P(x)$ 和所有常系数偏微分算子 $Q(\partial)$, 存在一个常数 $C_{P,Q}$, 使得对所有 $x\in\mathbf{R}^n$ 和所有 $\phi\in B$, 有

$$|P(x)Q(\partial)\phi(x)|\leqslant C_{P,Q}.$$

5. 证明嵌入 $E'(\mathbf{R}^n)\to S'(\mathbf{R}^n)\to D'(\mathbf{R}^n)$ 在强拓扑意义下是连续的.

6. 证明: (i) 若序列(ϕ_j)在 $S(\mathbf{R}^n)$ 内收敛于 0, 那么它在 $L^q(\mathbf{R}^n)(1\leqslant q\leqslant+\infty)$也收敛于 0; (ii) 若$(\phi_j)$ 在 S 内收敛于 0, 那么对所有 $k\in\mathbb{N}$ 和所有 $\alpha\in\mathbb{N}^n$, 序列$((1+r^2)^{k/2}\partial^\alpha\phi_j)$在 $L^q(1\leqslant q\leqslant+\infty)$内收敛于 0.

7. 证明函数$\exp(-|x|^2/2)$的Fourier变换等于函数

$$(2\pi)^{n/2}\exp(-|\xi|^2/2).$$

8. 证明 $F: S'\to S'$ 在强拓扑的意义下是连续的.

9. 证明下列公式:

$$F\delta=1,\ F1=(2\pi)^n\delta;$$
$$F(D_j\delta)=\xi_j,\ F(x_j)=(2\pi)^n(-D_j)\delta.$$

10. 若 $T=f$ 是一个局部可积函数, 又若 $\alpha\in C^\infty$, 证明按定义 4.8 给出的乘积 αT 和函数的通常乘积是一致的.

11. 完成第 6 节性质 3 的证明. 证明第 6 节的性质 4.

12. 证明嵌入 $S\to O_M\to S'$ 是连续的.

13. 设 $T\in S'(\mathbf{R}^n)$. 证明

$$\widehat{D^\alpha T}=\xi^\alpha\hat{T}\quad 和\quad \widehat{x^\alpha T}=(-D)^\alpha\hat{T}.$$

14. 若缓增广义函数序列(S_j)强收敛于 0, 那么对所有 $\phi\in S$, $(S_j*\phi)$ 在 C^∞ 内收敛于 0. 此外, 它关于 ϕ 在 S 的有界子集上一致收敛于 0.

15. 证明 $S*T$ 关于 T 的连续性, 由此完成定理 4.10 的证明.

16. 证明在 O_M 内 $\hat{\phi}_j\to\hat{T}$, 由此完成定理 4.13 的证明.

17. 证明对所有 $f,\ g\in S$, $F^{-1}(f*g)=(2\pi)^n(F^{-1}f)(F^{-1}g)$.

18. 若 $\phi\in S$ 和 $T\in S'$, 证明 $F^{-1}(\phi*T)=(2\pi)^n(F^{-1}\phi)(F^{-1}T)$.

19. 若 $\phi\in S$ 和 $T\in S'$, 证明 $\widehat{\phi T}=(2\pi)^{-n}\hat{\phi}*\hat{T}$.

20. 证明 O_M 是满足下列条件的所有 $\phi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 组成的空间: 对所有 $p\in\mathbb{N}^n$, 存在一个整数 k 使得$(1+|x|^2)^k\partial^p\phi(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 内有界.

21. 若$\phi\in O_M$，证明对所有$p\in\mathbb{N}^n$，$\partial^p\phi\in O_M$.

22. 若$\phi\in C^\infty$，并且对所有$f\in S$有$\phi f\in S$，证明$\phi\in O_M$.

23. 作为Paley-Wiener-Schwartz定理的一个结果，证明若$T\in E'(\mathbf{R}^n)$，并且对$\mathbf{R}^n$内所有常系数多项式P有$\langle T, P\rangle=0$，那么$T\equiv 0$.（提示：$D^p\hat{T}(0)=0$，$\forall p\in\mathbb{N}^n$.）于是，$\mathbf{R}^n$内所有常系数多项式组成的空间P在$C^\infty(\mathbf{R}^n)$内稠密.

第 5 章

Sobolev 空间

1. Sobolev 空间的定义

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，m是一个非负整数，又设 $1\leqslant p\leqslant +\infty$.

定义 5.1. 记 $H^{m,p}(\Omega)$是所有满足

$$D^\alpha f\in L^p(\Omega),\ \forall|\alpha|\leqslant m$$

的广义函数 $f\in D'(\Omega)$组成的空间，并装备着范数

$$\|f\|_{m,p}=\Big[\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha f(x)|^p dx\Big]^{1/p}. \tag{5.1}$$

当 $m=0$ 时，$H^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$. 由定义 5.1 容易得出下面的结果：

1. 若 $m\geqslant l$, 那么 $H^{m,p}(\Omega)\to H^{l,p}(\Omega)$有连续的嵌入.

2. 由范数(5.1)定义出的 $H^{m,p}(\Omega)$上的拓扑是使得映射

$$D^\alpha: H^{m,p}(\Omega)\to L^p(\Omega),\ \forall|\alpha|\leqslant m$$

是连续的最弱的拓扑.

3. 若 $p=2$, 那么范数(5.2)就是由内积

$$(f,\ g)_{m,2}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega D^\alpha f(x)\cdot\overline{D^\alpha g(x)}dx \tag{5.2}$$

导出的.

为简单起见，在讨论 $p=2$ 的情形时，我们记 $(f,\ g)_m$ 为内积(5.2)，并记 $\|f\|_m$ 为它所对应的范数. 同样，记 $H^m(\Omega)$为 Sobolev 空间 $H^{m,2}(\Omega)$.

定理 5.1. $H^{m,p}(\Omega)$是一个 Banach 空间.

证明 只要证明 $H^{m,p}(\Omega)$ 是完备的. 设 $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $H^{m,p}(\Omega)$

内的一个 Cauchy 序列. 对每个 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $|\alpha|\leqslant m$, $(D^\alpha f_j)_{j\in N}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列. 因为后一个空间是完备的, 故

$$D^\alpha f_j\to g_\alpha, \quad 在 L^p(\Omega) 内, \quad \forall|\alpha|\leqslant m.$$

特别, 在 $L^p(\Omega)$ 内 $f_j\to g_0$; 于是在 $D'(\Omega)$ 内 $f_j\to g_0$. 另一方面, 对每个 α, D^α 是 $D'(\Omega)$ 到 $D'(\Omega)$ 内的一个连续线性算子(见第 2 章, 第 5 节, 性质 4). 于是

$$D^\alpha f_j\to D^\alpha g_0, \quad \forall|\alpha|\leqslant m.$$

再由极限的唯一性, 得 $g_\alpha=D^\alpha g_0$; 因此, $g_0\in H^{m,p}(\Omega)$ 以及在 $H^{m,p}(\Omega)$ 内 $g_j\to g_0$. 证毕.

定义 5.2. 我们记 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 是 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H^{m,p}(\Omega)$ 内的闭包.

由于 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间的一个闭子空间, 所以 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 是一个 Banach 空间(当 $p=2$ 时是 Hilbert 空间).

当 $m=0$ 和 $p<+\infty$ 时, 容易看出 $H_0^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$. 一般, $H_0^{m,p}(\Omega)$ 是 $H^{m,p}(\Omega)$ 的真子空间.

因为, 由定义,

$$C_c^\infty(\Omega)\subset H_0^{m,p}(\Omega)\subset D'(\Omega)$$

具有连续的嵌入, 并且 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 内稠密, 那么 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 是广义函数的正则空间. 它的对偶 $(H_0^{m,p}(\Omega))'$ 是 $D'(\Omega)$ 的一个子空间, 其结构在 $1\leqslant p<+\infty$ 的情形由下列定理给出.

定理 5.2. 对偶 $(H_0^{m,p}(\Omega))'$ 与满足

$$T=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\partial^\alpha f_\alpha \tag{5.3}$$

的所有 $T\in D'(\Omega)$ 组成的空间是一致的. 其中 $f_\alpha\in L^{p'}(\Omega)$, $(1/p)+(1/p')=1$.

证明 设 T 有(5.3)的形式, 对所有 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$ 定义下列线性泛函:

$$\langle T, \phi\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\langle f_\alpha, \partial^\alpha\phi\rangle$$

$$=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f_\alpha\frac{\partial^\alpha\phi}{\partial x^\alpha}\,dx.$$

由 Holder 不等式, 我们得

$$|\langle T, \phi\rangle| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|f_\alpha\|_{L^{p'}} \|\partial^\alpha\phi\|_{L^p} \leqslant C\|\phi\|_{m,p},$$

这表明，因为 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 内稠密，所以 T 确定 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函.

反过来，若 $T\in(H_0^{m,p}(\Omega))'$. 设 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 使得 $|\alpha|\leqslant m$，又设 N 是这些 α 的个数，并记 $(L^p(\Omega))^N=L^p(\Omega)\times\cdots\times L^p(\Omega)$ (N 次) 是 $L^p(\Omega)$ 的 N 重积，并带有乘积拓扑. 定义映射

$$J: H^{m,p}(\Omega)\ni\phi\to(\partial^\alpha\phi)_{|\alpha|\leqslant m}\in(L^p(\Omega))^N.$$

它显然是 $H^{m,p}(\Omega)$ 到 $(L^p(\Omega))^N$ 内的一个典型等距映射. 特别，由于 J，可以把 $H^{m,p}(\Omega)$ 看作 $(L^p(\Omega))^N$ 的一个子空间 E. 在 $E=J(H_0^{m,p}(\Omega))$ 上定义下列线性泛函：

$$F((\partial^\alpha\phi)_{|\alpha|\leqslant m})=\langle T, \phi\rangle, \quad \forall\phi\in H_0^{m,p}(\Omega).$$

因为 T 在 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 上连续，所以 F 也在 E 上连续. 由 Hahn-Banach 定理，我们可以把 F 扩张为 $(L^p(\Omega))^N$ 上的一个连续线性泛函. 于是，存在函数 $g_\alpha\in L^{p'}(\Omega)$，$|\alpha|\leqslant m$，使得

$$\begin{aligned}\langle T, \phi\rangle &= F((\partial^\alpha\phi)_{|\alpha|\leqslant m})\\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega g_\alpha \frac{\partial^\alpha\phi}{\partial x^\alpha}\,dx, \quad \forall\phi\in H_0^{m,p}(\Omega),\end{aligned}$$

特别，对所有 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$ 也是这样. 在上面的式子中利用广义函数导数的概念，我们得

$$\langle T, \phi\rangle=\langle \sum_{|\alpha|\leqslant m}\partial^\alpha f_\alpha, \phi\rangle, \ \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega),$$

其中 $f_\alpha=(-1)^{|\alpha|}g_\alpha$. 证毕.

我们将记 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 是 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 的对偶.

当 $\Omega=\mathbb{R}^n$ 并且 $1\leqslant p<+\infty$ 时，$H_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)=H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. 事实上，这一结果是下面定理的一个结论.

定理 5.3. 设 $m\geqslant 0$ 以及 $1\leqslant p<+\infty$. 则 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 的一个稠密子空间.

证明 1. $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 的每个元素在范数 (5.1) 的意义下，都可以用 $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 的一列有紧支柱的元素来逼近. 事实上，若 $f\in H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$，令 $(\beta_k)_{k=1,2,\cdots}$ 是 C_c^∞ 的一列函数，使得在球 $B(0, k)$

上 β_k 等于 1, 在球 $B(0, k+1)$ 外等于 0. 又令

$$f_k = \beta_k f, \quad k=1, 2, \cdots,$$

显然 $f_k \in L^p$ 并且在 L^p 内 $f_k \to f$. 对所有 $1 \leqslant j \leqslant n$, 有

$$D_j f_k = \beta_k \cdot D_j f + D_j \beta_k \cdot f.$$

因为 $D_j f \in L^p$, 于是在 L^p 内 $\beta_k D_j f \to D_j f$. 另一方面, 因为 $f \in L^p$, 再由 β_k 之定义就得到 $D_j \beta_k \cdot f \in L^p$ 以及在 L^p 内当 $k \to +\infty$ 时 $D_j \beta_k \cdot f \to 0$. 利用归纳法, 我们可以证明在 L^p 内当 $k \to +\infty$ 时 $D^\alpha f_k \to D^\alpha f$.

2. 设 f 是 $H^{m,p}(\Omega)$ 的有紧支柱的元素, 又设 $(\alpha_j)_{j=1,2,\cdots}$ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的一列元素, 在 $D'(\mathbb{R}^n)$ 内收敛于 δ. 由定理 1.1, 对所有 $j=1, 2, \cdots$, 函数 $\phi_j = \alpha_j * f$ 属于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 另一方面, 若 $|\alpha| \leqslant m$, 则按公式(3.13), 有

$$D^\alpha \phi_j = \alpha_j * D^\alpha f.$$

因为 $D^\alpha f \in L^p$, $\forall |\alpha| \leqslant m$. 由定理 1.1 的第 4 部分, 便得到

$$D^\alpha \phi_j \to D^\alpha f, \text{ 在 } L^p \text{ 内, 当 } j \to +\infty, \ \forall |\alpha| \leqslant m.$$

于是, 在 $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 内 $\phi_j \to f$. 证毕.

从现在起, 我们将把注意力集中到 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 以及 $p=2$ 这一重要情形. 在这一情形下, 利用 Fourier 变换, 就可以用简单而优美的方式叙述 Sobolev 空间的结构, 并给出它的许多重要性质.

2. Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$

回到定义 1.1, 有: $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\forall |\alpha| \leqslant m$. 再由定理 4.5 和 Fourier 变换的性质, 后一个条件等价于

$$\xi^\alpha \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \forall |\alpha| \leqslant m.$$

这又等价于: 对每个常系数多项式 $P(\xi)$ 且其次数 $\leqslant m$, 有 $P(\xi)\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 最后, 它还等价于

$$(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

这些结论诱导出下面的定义.

定义 5.3. 设 s 是一个实数. 记 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 是适合

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

的所有广义函数 $f\in S'(\mathbb{R}^n)$ 所组成的空间，装备着内积

$$(f,\ g)_s=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^s\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi, \tag{5.4}$$

以及由内积所引出的 s 范数

$$\|f\|_s=\left[\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right]^{1/2}. \tag{5.5}$$

由此立即可得：(1) 若 $s\geqslant 0$，$H^s(\mathbb{R}^n)\subset L^2(\mathbb{R}^n)$；(2) 若 $s=m$ 是一个非负整数，那么定义 5.3 和定义 5.1 是一致的，并且范数 (5.1) 和 (5.5) 相等价.

定理 5.4. 对每个实数 s，$H^s(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Hilbert 空间.

证明 设 (f_j) 是 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 内的 Cauchy 序列. 按定义，

$$((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}_j(\xi))$$

是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 内的 Cauchy 序列. 因为后一空间是完备的，所以序列 $((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}_j(\xi))$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 内收敛于 $\hat{g}$，于是 $\hat{g}\in S'$（第 4 章，第 2 节，例 2）. 令

$$\hat{f}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{g}(\xi).$$

显然对每个 $s\gtrless 0$，$\hat{f}\in S'(\mathbb{R}^n)$ 并且序列 (f_j) 在 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 内收敛于 f. 证毕.

定理 5.5. 设 s 和 t 都是实数并且 $s\geqslant t$，我们有下面的具有连续嵌入的包含关系

$$S(\mathbb{R}^n)\subset H^s(\mathbb{R}^n)\subset H^t(\mathbb{R}^n)\subset S'(\mathbb{R}^n),\quad (s\geqslant t)$$

并且对所有 s，S 在 H^s 内稠密.

证明 由定义 5.3 立即可得嵌入

$$H^s\to H^t\quad (s\geqslant t)$$

是连续的.

设 $f\in H^s(\mathbb{R}^n)$. 因为 S 在 L^2 中稠密，给定 $\varepsilon>0$，能够找到 $\phi\in S$ 使得

$$\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi)-\hat{\phi}(\xi)\|_{L^2}<\varepsilon.$$

另一方面，对所有 s，

$$\hat{\psi}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{\phi}(\xi)$$

是属于 S 的. 作适当的代替, 可得

$$\|(1+|\xi|^2)^{s/2}(\hat{f}(\xi)-\hat{\psi}(\xi))\|_{L^2}<\varepsilon,$$

即
$$\|f-\psi\|_s<\varepsilon;$$

因此, S 在 H^s 内稠密.

作为习题, 我们留给读者去证明嵌入

$$S\to H^s \quad \text{和} \quad H^s\to S'$$

是连续的. 证毕.

由定理 5.5 和 4.2, 我们得: 对任何实数 s, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 内稠密. 从而, 对任何实数 s, $H^s(\mathbb{R}^n)$ 可以定义为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 关于范数(5.5)的完备化空间.

定理 5.6. $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的强对偶, 在代数的和拓扑的意义下, 可以看作和 $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ 是相同的.

证明 首先, 我们注意到因为

$$S\subset H^s\subset S'$$

并且对所有 s, S 在 H^s 内稠密, 所以 H^s 的对偶 $(H^s)'$ 是 S' 的一个子空间.

若 $f\in(H^s)'$, 则存在常数 $C>0$, 使得对所有 $\phi\in S$, $\|\phi\|_s\leqslant 1$, 成立着

$$|\langle f,\ \phi\rangle|\leqslant C.$$

或者, 由 Fourier 变换, 它等价于

$$|\langle\hat{f},\ \hat{\phi}\rangle|\leqslant C_1,\quad \forall\|\phi\|_s\leqslant 1.$$

设
$$\hat{\psi}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\phi}(\xi).$$

那么, 由 $\phi\in S$, $\|\phi\|_s\leqslant 1$ 获得 $\psi\in S$ 以及 $\|\psi\|_{L^2}\leqslant 1$, 反之亦如此. 将 $\hat{\psi}$ 代入上面的不等式中, 得

$$\left|\left\langle\hat{f},\ \frac{\hat{\psi}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\right\rangle\right|<C_1,\quad \forall\psi\in S \text{ 并且 } \|\psi\|_{L^2}\leqslant 1.$$

或, 等价地,

$$|\langle(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{f},\ \hat{\psi}\rangle|<C_1,\quad \forall\psi\in S \text{ 并且 } \|\psi\|_{L^2}\leqslant 1.$$

因此得到 $(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{f}\in L^2$, 这就证明了 $f\in H^{-s}$.

反过来，设 $f\in H^{-s}$ 并定义

$$\langle f, \phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\phi}(\xi)d\xi, \ \forall\phi\in S.$$

由 Holder 不等式得出

$$|\langle f, \phi\rangle|\leqslant\|f\|_{-s}\|\phi\|_s,$$

于是 $f\in(H^s)'$.

最后，我们留给读者去证明 $(-s)$ 范数等价于对偶范数

$$\|f\|=\sup_{\|\phi\|_s\leqslant 1}|\langle f, \phi\rangle|.$$

这意味着在 H^{-s} 上，$(H^s)'$ 的强拓扑与由 $(-s)$ 范数定义的拓扑是一致的．证毕．

下面的定理（它是定理 5.2 当 $\Omega=\mathbb{R}^n$ 以及 $p=2$ 时的一个特殊情形）给出了 m 是一个非负整数时 H^{-m} 的结构．其证明是建立在 L^2 内 Fourier 变换的性质的基础上．

定理 5.7. 设 $m\geqslant 0$ 是一个整数．则每个 $f\in H^{-m}$ 可以表示为有限个平方可积函数的导数（导数的阶 $\leqslant m$）之和．

证明 若 $f\in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$，则由定义，

$$(1+|\xi|^2)^{-m/2}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

或等价地，

$$\hat{g}(\xi)=\frac{\hat{f}(\xi)}{1+|\xi_1|^m+\cdots+|\xi_n|^m}\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

于是

$$\hat{f}(\xi)=\hat{g}(\xi)+\sum_{j=1}^n|\xi_j|^m\hat{g}(\xi)=\hat{g}(\xi)+\sum_{j=1}^n\xi_j^m\left[\frac{|\xi_j|^m}{\xi_j^m}\hat{g}(\xi)\right]$$

$$=\hat{g}(\xi)+\sum_{j=1}^n\xi_j^m\hat{g}_j(\xi),$$

其中 $\hat{g}_j(\xi)=(|\xi_j|^m/\xi_j^m)\hat{g}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$．由定理 4.5 得

$$f=g+\sum_{j=1}^n D_j^m g_j.$$

证毕．

现在我们将证明 Sobolev 嵌入定理．在这里只考虑 $\Omega=\mathbb{R}^n$ 和 $p=2$ 的情形，这时，利用 Fourier 变换和它的性质，证明是十分简单的．至于一般的情形，读者可以参考 Lions[20]．

定理 5.8. 若 $s>n/2$, 则 $H^s(\mathbb{R}^n)\subset C^0(\mathbb{R}^n)$ 有连续的嵌入.

证明 若 $s>n/2$, 容易知道 $(1+|\xi|^2)^{-s/2}\in L^2(\mathbb{R}^n)$. 于是, 对每个 $f\in H^s$ 有

$$\hat{f}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-s/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi)\in L^1(\mathbb{R}^n). \qquad (5.6)$$

再由命题 4.2, 得到 $f\in C^0(\mathbb{R}^n)$. 其次, 设在 H^s 内 $f_j\to 0$. 则按定义, 在 L^2 内 $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}_j(\xi)\to 0$, 并且由 (5.6), 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 内 $\hat{f}_j\to 0$; 于是在 $C^0(\mathbb{R}^n)$ 内 $f_j\to 0$ (命题4.2). 证毕.

系 若 $s>(n/2)+k$, 这里 k 是一个非负整数, 那么 $H^s(\mathbb{R}^n)\subset C^k(\mathbb{R}^n)$ 有连续的嵌入.

证明 设 $|\alpha|\leqslant k$. 若 $f\in H^s$, 那么容易看出 $D^\alpha f\in H^{s-|\alpha|}$. 因为 $s-|\alpha|\geqslant s-k>n/2$, 再由上面的定理便得出, $D^\alpha f\in C^0$, $\forall|\alpha|\leqslant k$, 证毕.

现在我们引进下列向量空间:

$$H^\infty(\mathbb{R}^n)=\bigcap_s H^s(\mathbb{R}^n),\quad H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)=\bigcup_s H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

作为定理 5.8 的系的一个结果, $H^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的一个子空间. 事实上, H^∞ 是与空间 D_{L^2} 一致的, D_{L^2} 是由所有适合 $D^\alpha\phi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ $(\forall\alpha)$ 的 $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 组成的, 这将在第 6 章中讨论. 这一空间在 Schwartz 的书中也曾讨论过[29, 第 VI 章, p.55].

在 H^∞ 上, 我们定义使得恒等映射 $H^\infty\to H^s$, $\forall s$, 是连续的最弱的局部凸拓扑. 在 $H^{-\infty}$ 上, 我们定义 $H^s(\forall s)$ 的诱导极限拓扑. 于是

$$H^\infty\subset\cdots\subset H^s\subset H^t\subset\cdots\subset H^{-\infty}\quad(s\geqslant t)$$

具有连续的嵌入.

由定理 5.7 容易获得下列关于 $H^{-\infty}$ 的结构的结果.

定理 5.9. 广义函数 f 属于 $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当它是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的有限个函数的导数之和.

例 1. 对所有 $s<-n/2$, Dirac 测度 δ 属于 H^s. 事实上, 当 $s<-n/2$ 时, 我们有 $\hat{\delta}=1$ 以及 $(1+|\xi|^2)^{s/2}\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

2. 若 m 是一个正整数, 使得 $-m<-n/2$, 由定理 5.7, δ 可以表示为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中有限个函数的导数 (导数的阶 $\leqslant m$) 之和.

3．设 $$\alpha_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

是第1章第1节中定义的检验函数．我们已经知道，在 $E'(\mathbb{R}^n)$ 内 $\varepsilon\to0$ 时 $\alpha_\varepsilon\to\delta$（见定理3.3系后面的注）．于是，在 S' 内当 $\varepsilon\to0$ 时 $\hat{\alpha}_\varepsilon\to1$．但还可以得到一个更强的结果．事实上，写出

$$\hat{\alpha}_\varepsilon(\xi)=\varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle y,\varepsilon\xi\rangle}\alpha(y)\,dy=\hat{\alpha}(\varepsilon\xi).$$

令 $\varepsilon\to0$，可得在 $\mathbb{R}^n$ 的每一点上，

$$\hat{\alpha}_\varepsilon(\xi)\to1.$$

若 $s<-n/2$，可以写出

$$\|\alpha_\varepsilon-\delta\|_s^2=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{\alpha}(\varepsilon\xi)-1|^2d\xi.$$

因为出现在积分号内的函数当 $\varepsilon\to0$ 时在每一点上收敛于0，它们都以一个可积函数为界，于是由 Lebesgue 控制收敛定理，

$$\|\alpha_\varepsilon-\delta\|_s^2\to0\quad(\varepsilon\to0),$$

这就得出结论：对所有 $s<-n/2$，在 H^s 内 (α_ε) 收敛于 δ．

4．$1-\Delta$ 的基本解．设 Δ 是 Laplace 算子

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

我们要寻找一个缓增广义函数 E 使得 $(1-\Delta)E=\delta$．利用 Fourier 变换可得 $(1+|\xi|^2)\cdot\hat{E}=1$；于是

$$\hat{E}=\frac{1}{1+|\xi|^2}$$

并使得 $$(1+|\xi|^2)^{(s+2)/2}\cdot\hat{E}\in L^2(\mathbb{R}^n),\quad\forall s<-\frac{n}{2}.$$

从而，算子 $1-\Delta$ 有一个基本解 $E\in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$，$s<-n/2$．

类似地，算子 $(1-\Delta)^k$ 有一个属于 H^{s+2k} 的基本解．再由定理5.8，能够选取充分大的整数 k 使得 $(1-\Delta)^k$ 有一个属于 $C^0(\mathbb{R}^n)$ 的基本解．

3．$H^s(\mathbb{R}^n)$ 内的乘积和卷积运算

定理 5.10． 若 $\phi\in S$ 和 $f\in H^s$，则乘积 ϕf 属于 H^s，并且

双线性映射

$$S\times H^s\ni(\phi,f)\to\phi f\in H^s$$

对每个变量连续.

定理的证明建立在下面两个引理之上.

引理 5.1. 设 $K(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的一个连续函数, 又设存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|K(x,y)|dx\leqslant C \quad \text{关于 } y \text{ 是一致的},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|K(x,y)|dy\leqslant C \quad \text{关于 } x \text{ 是一致的}.$$

则
$$Af(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)dy$$

确定一个从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 内的连续线性泛函.

证明 对所有 $f,g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 我们有

$$\begin{aligned}|(Af,g)|&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}Af(x)\overline{g(x)}dx\right|\\&=\left|\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\overline{g(x)}\,dx\,dy\right|\\&\leqslant\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|K(x,y)|^{1/2}|f(y)|\,|K(x,y)|^{1/2}|g(x)|dx\,dy\\&\leqslant\left[\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|K(x,y)|\,|f(y)|^2dx\,dy\right]^{1/2}\\&\quad\cdot\left[\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|K(x,y)|\,|g(x)|^2dx\,dy\right]^{1/2}\\&\leqslant C\|f\|_{L^2}\cdot\|g\|_{L^2},\end{aligned}\tag{5.7}$$

这就证明了 $A:L^2\to L^2$ 是一个连续线性算子. 证毕.

注 由不等式(5.7)立即可得算子 A 的范数不超过 C.

引理 5.2. (Peetre 不等式) 对每个实数 t 我们有

$$\left[\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right]^t\leqslant 2^{|t|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|t|},\tag{5.8}$$

其中 $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$.

证明 对所有 $\xi, \zeta\in\mathbb{R}^n$，有

$$1+|\xi-\zeta|^2=1+|\xi|^2-2\xi\cdot\zeta+|\zeta|^2$$
$$\leqslant 1+2|\xi|^2+2|\zeta|^2\leqslant 2(1+|\xi|^2)(1+|\zeta|^2).$$

令 $\eta=\xi-\zeta$，可得

$$1+|\eta|^2\leqslant 2(1+|\xi|^2)(1+|\xi-\eta|^2).$$

若 $t<0$，在后一个不等式的两边同乘 $-t$ 次幂便得到 (5.8)．若 $t>0$，将上述不等式中的 ξ 和 η 对调并乘 t 次幂仍旧得到 (5.8)．证毕．

定理 5.10. 的证明 1．设 $\phi\in S$ 和 $f\in H^s$．由第 4 章的习题19，有

$$\widehat{\phi f}(\xi)=(2\pi)^{-n}(\hat{\phi}*\hat{f})(\xi)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}(\xi-\eta)\hat{f}(\eta)d\eta.$$

为了证明 $\phi f\in H^s$，按定义 5.3，只要证明

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\phi f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

我们写出

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\phi f}(\xi)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\phi}(\xi-\eta)\hat{f}(\eta)d\eta$$
$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right]^{s/2}\hat{\phi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{s/2}\hat{f}(\eta)d\eta.$$

设
$$K(\xi, \eta)=\left[\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right]^{s/2}\hat{\phi}(\xi-\eta).$$

由 Peetre 不等式，我们得

$$|K(\xi, \eta)|\leqslant 2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}|\hat{\phi}(\xi-\eta)|$$
$$=2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{(|s|/2)+n}|\hat{\phi}(\xi-\eta)|(1+|\xi-\eta|^2)^{-n}$$
$$\leqslant C(1+|\xi-\eta|^2)^{-n}, \tag{5.9}$$

后一个不等式成立是因为 $\phi\in S$．于是 $K(\xi, \eta)$ 满足引理 5.1 的假设，从而 $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\phi f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$．

2．容易给出下列不等式：

$$\|\phi f\|_s\leqslant C\|f\|_s,$$

这表明映射 $(\phi, f)\to\phi f$ 关于 $f\in H^s$ 是连续的．其次，设在 S 内

$\phi_j \to 0$，并设

$$C_j = \sup_{\zeta \in \mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^{(|s|/2)+n} |\hat{\phi}_j(\zeta)|$$

是出现在(5.9)内的相应的常数．由引理 5.1 的注，得

$$\|\phi_j f\|_s = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\phi_j f}(\xi)\|_{L^2} \leqslant C_j C' \|f\|_s.$$

因为 $\phi_j \to 0$，于是 $C_j \to 0$，上面的不等式表明乘积 ϕf 关于 $\phi \in S$ 是连续的．证毕．

定理 5.10 的一个非常有用的推论如下：

系 设 $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ 是一个偏微分算子，其阶 $\leqslant m$，其系数属于 $S(\mathbb{R}^n)$．对每个实数 s，P 确定一个从 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ 内的连续线性映射．

证明 这只要注意到 D^α 将 H^s 连续地映射到 $H^{s-|\alpha|}$ 内，并利用定理 5.10 便得证明．证毕．

定理 5.11. 若 $\phi \in S$ 和 $f \in H^s$，则卷积 $\phi * f \in H^s$ 以及双线性映射

$$(S \times H^s) \ni (\phi, f) \to \phi * f \in H^s$$

对每个变量连续．并且，$\phi * f \in H^\infty$．

证明 由定理 4.9，若 $\phi \in S$ 和 $f \in H^s$，则 $\phi * f$ 是一个 C^∞ 函数．由假设，$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi) \in L^2$，并由于 $\hat{\phi} \in S$，就得出 $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi)\hat{\phi}(\xi) \in L^2$；于是 $\phi * f \in H^s$．

而不等式

$$\|\phi * f\|_s = \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi\right]^{1/2} \leqslant \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{\phi}(\xi)| \cdot \|f\|_s$$

表明卷积 $\phi * f$ 对每个变量的连续性．

最后，我们知道若 $\phi \in S$，那么对每个实数 k，$(1+|\xi|^2)^{k/2}\phi \in S$．于是，对每个 k

$$(1+|\xi|^2)^{(s+k)/2}\hat{\phi}(\xi)\hat{f}(\xi) \in L^2,$$

这意味着 $\phi * f \in H^\infty$．证毕．

定义 5.4. 如果一个连续线性算子 $L: C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 可

以扩张为一个从 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ 内的连续线性算子，我们就说 L 的阶 $\leqslant m$. 如果 L 的阶 $\leqslant r$, m 是这种 r 的最大下界，我们就说 L 的阶是 m.

例 1. 一个阶 $\leqslant m$, 系数属于 $S(\mathbb{R}^n)$ 的偏微分算子，由定理 5.10 的系，再根据定义 5.4 可知，它定义了一个阶 $\leqslant m$ 的算子. 如果偏微分算子的阶是 m, 那么这个算子的阶也是 m.

2. 设 $\phi\in S$ 并定义 $M_\phi: C_0^\infty\to C^\infty$ 为

$$M_\phi(f)=\phi\cdot f.$$

由定理 5.10, 这个乘积算子 M_ϕ 的阶 $\leqslant 0$.

3. 设 $\phi\in S$ 并定义 $L_\phi: C_0^\infty\to C^\infty$ 为

$$L_\phi(f)=\phi*f.$$

由定理 5.11, 这一卷积算子 L_ϕ 的阶是 $-\infty$.

习 题

1. 证明: 若 $m\geqslant l$, 则 $H^{m,p}(\Omega)\subset H^{l,p}(\Omega)$ 有连续的嵌入.

2. 证明 $H^{m,p}(\Omega)$ 上使得映射

$$D^\alpha: H^{m,p}(\Omega)\to L^p(\Omega),\ |\alpha|\leqslant m$$

为连续的最弱的拓扑与由范数(5.1)所定义的拓扑是一致的.

3. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, 又设 $f\in H_0^{m,p}(\Omega)$. 证明函数

$$\tilde{f}=\begin{cases} f, & 在\ \Omega\ 上(\text{a.e.}),\\ 0, & 在\ \mathbb{R}^n-\Omega\ 上,\end{cases}$$

属于 $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

4. 设 Ω 是单位球, f 是在 Ω 上等于 1 的函数. 证明: (i) $f\in H^{1,p}(\Omega)$; (ii) 函数 $\tilde{f}$ 不属于 $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. 结论是: $f\in H^{1,p}(\Omega)$ 但 $\tilde{f}\notin H_0^{1,p}(\Omega)$.

5. 设 J 是定理 5.2 的证明中所定义的线性映射. 证明它是从 $H^{m,p}(\Omega)$ 到 $(L^p(\Omega))^N$ 内的等距映射.

6. 设 $f\in S'(\mathbb{R}^n)$. 证明下列条件互相等价:

(i) $D^\alpha f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\forall|\alpha|\leqslant m$;

(ii) $\xi^\alpha\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\forall|\alpha|\leqslant m$;

(iii) $P(\xi)\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 其中 $P(\xi)$ 是任何一个次数 $\leqslant m$ 的常系数多项式;

(iv) $(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$;

(v) $(1+|\xi|)^m\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

7. 证明：当 s 是一个非负整数 m 时，定义 5.3 和定义 5.1 是一致的，并且范数(5.1)和范数(5.3)等价.

8. 设 s 是一个实数. 证明嵌入 $S \to H^s$ 和 $H^s \to S'$ 都是连续的.

9. 证明定理 5.6 中 $(-s)$ 范数等价于对偶范数，以完成定理 5.6 的证明.

10. 证明 D^α 确定了一个从 H^s 到 $H^{s-|\alpha|}$ 内的连续线性映射.

第 6 章

某些广义函数空间

1. 空间 D_{L^p} 和它的对偶

按照 Schwartz [28, 第 VI 章, p.55]，我们给出下面的定义.

定义 6.1. 设 p 是一个实数，$1\leqslant p\leqslant+\infty$. 我们记 $D_{L^p}(\mathbb{R}^n)$ 是由满足下列条件的所有函数 $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 组成的空间：对所有 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，$\partial^\alpha\phi\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 在这一空间内装备着对所有 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，使映射

$$\partial^\alpha: D_{L^p}(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$$

为连续的最弱的局部凸拓扑.

D_{L^p} 的拓扑与由可列个范数

$$\|\phi\|_{m,p}=\Big[\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|\partial^\alpha\phi\|_{L^p}^p\Big]^{1/p},\quad m\in\mathbb{N} \tag{6.1}$$

定义的拓扑是一致的. 显然 D_{L^p} 是一个 Frechet 空间.

我们有下列的连续嵌入：

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\subset D_{L^p}(\mathbb{R}^n)\subset D'(\mathbb{R}^n),\quad 1\leqslant p<+\infty.$$

并且，若 $1\leqslant p<+\infty$，C_c^∞ 是 D_{L^p} 的一个稠密子空间；于是 D_{L^p} 是 $\mathbb{R}^n$内广义函数的正则空间. 然而，C_c^∞ 在 D_{L^∞} 内不稠密.（证明留给读者.）我们再记 $\dot{D}_{L^\infty}$ 是 D_{L^∞} 内所有在无限远处收敛于 0 的函数组成的子空间. 显然 $\dot{D}_{L^\infty}$ 是 D_{L^∞} 的一个闭子空间；于是它是一个 Frechet 空间. 同样有下列连续嵌入：$C_c^\infty\subset\dot{D}_{L^\infty}\subset D'$，并且 C_c^∞ 在 $\dot{D}_{L^\infty}$ 内稠密；因此，$\dot{D}_{L^\infty}$ 是广义函数的一个正则空间.

为了进一步获得有关空间 D_{L^p} 的构造的性质，需要下面的定理.

定理 6.1. 设 a 和 A 是两个实数，$0<a<A$，并记 B_A 和 B_{A-a} 是两个半径分别为 A 和 $A-a$ 的同心球. 如果广义函数 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$

的所有秩[1] $\leqslant 1$ 的导数都是 B_A 上的 L^p 范数的有界函数，其界为 M，那么，在 B_{A-a} 上，T 是有界函数，其界为 $C(A, n)a^{-n}M$，其中 $C(A, n)$ 是一个与 T 和 a 无关的常数.

证明 由定理 1.1 的系 3，存在一个函数 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得 $\operatorname{supp}\psi\subset B_A$，在 B_{A-a} 上 $\psi(x)=1$，并对所有 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，

$$|\partial^\alpha\psi(x)|\leqslant C(\alpha, n)\cdot a^{-|\alpha|}.$$

另一方面，设

$$Y(x)=\begin{cases}1, & 若\ x_1\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0,\\ 0, & 在其他点\end{cases}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 内的 Heaviside 函数. 它是 $\partial^n/\partial x_1\cdots\partial x_n$ 的一个基本解（第 2 章，第 5 节，例 6）. 我们可以写出

$$\psi T=\delta*(\psi T)=\frac{\partial^n Y}{\partial x_1\cdots\partial x_n}*(\psi T)=Y*\frac{\partial^n(\psi T)}{\partial x_1\cdots\partial x_n};$$

于是 T 是 B_{A-a} 内的一个函数. 对所有 $x=(x_1, \cdots, x_n)\in B_{A-a}$，写出

$$T(x)=(\psi T)(x)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\frac{\partial^n(\psi T)}{\partial y_1\cdots\partial y_n}dy.$$

由 Leibniz 公式，

$$\frac{\partial^n(\psi T)}{\partial y_1\cdots\partial y_n}=\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=n\\ \alpha\text{ 的秩 }\leqslant 1\\ \beta\text{ 的秩 }\leqslant 1}}C_{\alpha,\beta}\frac{\partial^\alpha\psi}{\partial y^\alpha}\cdot\frac{\partial^\beta T}{\partial y^\beta}.$$

再由 Hölder 不等式，得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\left|\frac{\partial^\alpha\psi}{\partial y^\alpha}\right|\cdot\left|\frac{\partial^\beta T}{\partial y^\beta}\right|dy&\leqslant\int\cdots\int_{B_A}\left|\frac{\partial^\alpha\psi}{\partial y^\alpha}\right|\cdot\left|\frac{\partial^\beta T}{\partial y^\beta}\right|dy\\ &\leqslant\left(\int\cdots\int_{B_A}\left|\frac{\partial^\alpha\psi}{\partial y^\alpha}\right|^{p'}dy\right)^{1/p'}\cdot\left(\int\cdots\int_{B_A}\left|\frac{\partial^\beta T}{\partial y^\beta}\right|^{p}\right)^{1/p}\\ &\leqslant C(\alpha, n)a^{-|\alpha|}M,\end{aligned}$$

这就得到所要的不等式. 证毕.

系 1. 设 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$ 的所有秩 $\leqslant 1$ 的导数都是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的函数，那么有下面的估计式

---

(1) 若 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，α 的秩 $=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(\alpha_j)$.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|T(x)|\leqslant C\cdot\sum_{\alpha\text{的秩}\leqslant 1}\|\partial^\alpha T\|_{L^p}.$$

证明 这只要将定理应用到以 x（它是 $\mathbb{R}^n$ 内的一个变量）为中心，以 2 和 1 为半径的球上即可．证毕．

系 2. 若 $\phi\in D_{L^p}(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，则 ϕ 在 $\mathbb{R}^n$ 内有界；若 $1\leqslant p<+\infty$，则 ϕ 在无限远处收敛于 0.

证明 $\phi\in D_{L^p}$ 的有界性由系 1 得出．若 $\phi\in D_{L^p}$，$1\leqslant p<+\infty$，能够找到一个充分大的数 $R>0$ 使得对所有的秩 $\leqslant 1$ 的 α 有

$$\int\cdots\int_{|x|>R}\left|\frac{\partial^\alpha\phi}{\partial x^\alpha}\right|dx<\varepsilon.$$

再应用定理 6.1，我们得：对充分大的 $|x|$，$|\phi(x)|$ 可以任意小．证毕．

系 3. 若 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant+\infty$，则 $D_{L^p}\subset D_{L^q}$ 有连续的嵌入．

证明 当 $q=+\infty$ 时，这一结论是系 2 的一个结果．设 $q<+\infty$，令 $\phi^{(\beta)}=\partial^\beta\phi$ 并利用系 1，得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\phi^{(\beta)}(x)|^q dx\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\phi^{(\beta)}(x)|^{q-p}\int_{\mathbb{R}^n}|\phi^{(\beta)}(x)|^p dx$$

$$\leqslant C\sum_{\alpha\text{的秩}\leqslant 1}\|\partial^\alpha\phi^{(\beta)}\|_{L^p}^{q-p}\cdot\|\phi^{(\beta)}\|_{L^p}^p.\quad \text{证毕.}$$

注 空间 $D_{L^p}(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ 都和 Sobolev 空间有联系．事实上，由 Sobolev 嵌入定理，当 m 充分大时 $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 是连续函数的一个空间．于是，就得到

$$D_{L^p}(\mathbb{R}^n)=\bigcap_{m=0}^{\infty}H^{m,p}(\mathbb{R}^n),$$

并且前面所定义的 D_{L^p} 的拓扑与使嵌入 $D_{L^p}\to H^{m,p}$ 为连续的最弱的拓扑是一致的．

2. D_{L^p} 的对偶

我们在上面已经指出，空间 $D_{L^p}(1\leqslant p<+\infty)$ 和 D_{L^∞} 都是广义函数的正则空间；因此它们的对偶都是 $D'(\mathbb{R}^n)$ 的子空间．

定义 6.2. 记$D'_{L^p}(1<p\leqslant+\infty)$是$D_{L^{p'}}$的对偶,其中$(1/p)+(1/p')=1$. 记$D'_{L^1}$是$D_{L^\infty}$的对偶.

这些对偶都是$D'(\mathbb{R}^n)$的子空间. 如同我们在前面已经讨论过的那样, 可以定义D'_{L^p}的强拓扑并且证明嵌入$D'_{L^p}\to D'$是强连续的.

由$L^p(1<p<+\infty)$的自反性得到空间D_{L^p}是自反的. 同时, 还可以证明D'_{L^1}的对偶是D_{L^∞}[28, 第 VI 章, 第 8 节].

因为
$$D_{L^{q'}}\subset D_{L^{p'}},\quad \forall q'\leqslant p',$$
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$在$D_{L^{q'}}(1\leqslant q'<+\infty)$内稠密并且在$D_{L^\infty}$内也稠密,这就得到
$$D'_{L^p}\subset D'_{L^q},\quad \forall p\leqslant q.$$

下面的定理与定理 5.2 相当接近,给出有关D'_{L^p}的结构.

定理 6.2. 广义函数$T\in D'_{L^p}$当且仅当存在一个整数
$$m=m(T)>0$$
使得
$$T=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\partial^\alpha f_\alpha,\tag{6.2}$$
其中$f_\alpha\in L^p$.

证明 我们将看到其证明与定理 5.2 的证明是非常相似的. 首先考察$1<p\leqslant+\infty$的情形. 若$T\in D'(\mathbb{R}^n)$具有形式(6.2), 那么T确定$D_{L^{p'}}$上的一个连续线性泛函; 于是$T\in D'_{L^p}$.

反过来, 设$T\in D'_{L^p}$. 那么在$D_{L^{p'}}$内存在O点的一个邻域$W(m,\delta)$使得
$$|\langle T,\phi\rangle|\leqslant 1,\ \forall\phi\in W(m,\delta).$$
这就说明存在常数$C>0$使得
$$|\langle T,\phi\rangle|\leqslant C\sup_{|\alpha|\leqslant m}\|\partial^\alpha\phi\|_{L^{p'}},\quad \forall\phi\in D_{L^{p'}}.\tag{6.3}$$
设α是n元组并且$|\alpha|\leqslant m$, 记N是所有这些α的个数, 再令$(L^{p'})^N=L^{p'}\times\cdots\times L^{p'}$($N$次)并定义映射
$$J:D_{L^{p'}}\ni\phi\to(\partial^\alpha\phi)_{|\alpha|\leqslant m}\in(L^{p'})^N.$$
因为J显然是一一映射, 因而可以把$JD_{L^{p'}}$看作$(L^{p'})^N$的一个真子空间. 在$JD_{L^{p'}}$上我们定义线性泛函$F:JD_{L^{p'}}\to\mathbb{C}$如下:

$$F((\partial^\alpha \phi)_{|\alpha|\leq m}) = \langle T, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in D_{L^{p'}}.$$

由(6.3)，F 是 $JD_{L^{p'}}$ 上的连续线性泛函，而 $JD_{L^{p'}}$ 上装备着由 $(L^{p'})^N$ 导出的拓扑．再由 Hahn-Banach 定理，F 可以扩张成为 $(L^{p'})^N$ 上的连续线性泛函．因为乘积$(L^{p'})^N$ 的对偶是乘积 $(L^p)^N$，所以存在函数 $g_\alpha \in L^p$，$|\alpha| \leq m$，使得对所有 $\phi \in D_{L^{p'}}$，

$$\langle T, \phi \rangle = F((\partial^\alpha \phi)_{|\alpha|\leq m}) = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} g_\alpha \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha} dx;$$

于是

$$T = \sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha f_\alpha$$

其中 $f_\alpha = (-1)^\alpha g_\alpha$．证毕．

至于 $p=1$ 的情形，只要将上述证明稍加修改就可以了，我们把它留给读者去进行．

如同我们在定理 6.1 系 3 后的注中所提及的，空间 D_{L^p} 在代数和拓扑的意义下和 H^∞ 是一致的．它的对偶 D'_{L^p} 也和 $H^{-\infty}$ 一致．于是，定理 5.9 是定理 6.2 的一个推论．

对充分大的 k，利用算子 $(1-\Delta)^k$ 的基本解，我们能够按照下面的方法证明定理 6.2 的进一步的结论．

系 对每个广义函数 $T \in D'_{L^p}$，存在一个整数 $m = m(T) > 0$，使得

$$T = \sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha f_\alpha,$$

其中 f_α 都是属于 L^p 的有界连续函数．此外，若 $p < +\infty$，每个 f_α 在无限远处收敛于 0．

证明 由定理 6.2，$T = \sum_{|\beta|\leq l} \partial^\beta g_\beta$，其中 $g_\beta \in L^p$．设 E 是 $(1-\Delta)^k$ 的一个基本解并选取 k 充分大使得 E 是一个连续函数(见第 5 章，第 2 节例 4)．设 $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，并且在 $\mathbb{R}^n$ 内原点的某个邻域上 γ 等于 1，又设 $F = \gamma E$．我们有

$$(1-\Delta)^k F = \delta - \phi, \tag{6.4}$$

其中 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$．这一广义函数 F 称为偏微分算子 $(1-\Delta)^k$ 的拟基本解．由(6.4)得：每个广义函数 $g \in D'(\mathbb{R}^n)$ 可以写为

$$g=(1-\Delta)^k(\gamma E*g)+\phi*g. \tag{6.5}$$

此外，若 $g\in L^p$, 因为 γE 和 ϕ 都是有紧支柱的连续函数，这就得知(见定理 1.1) $\gamma E*g$ 和 $\phi*g$ 都是属于 L^p 的有界连续函数，并且若 $p<+\infty$, 它们在无限远处收敛于 0. 于是，每个 $g\in L^p$ 能够写为 L^p 中的有界连续函数的导数(在广义函数意义下)的有限和，并且当 $p<+\infty$ 时这些函数在无限远处收敛于 0. 将这些事实应用到 T 的表示式中所出现的函数 g_β 上，便得到所要的结论. 证毕.

3. Fourier 变换

我们将证明在 $p=1$ 和 $p=2$ 的情形下，有关 D'_{L^p} 中元素的 Fourier 变换的一些结果.

定理 6.3. 若 $\phi\in D_{L^1}$, 它的 Fourier 变换是一个在无限远处急降的连续函数. 若 $T\in D'_{L^1}$, 它的 Fourier 变换是一个在无限远处缓增的连续函数.

证明 1. 设 $\phi\in D_{L^1}$. 则对任何 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 有 $D^\alpha\phi\in L_1$; 于是，由命题 4.1, $\xi^\alpha\hat{\phi}(\xi)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个连续有界函数. 这表明对每个多项式 $P(\xi)$, 乘积 $P(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界函数; 于是 $\hat{\phi}$ 是一个在无限远处急降的连续函数.

2. 若 $T\in D'_{L^1}$ 则 $T=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}D^\alpha f_\alpha$, 其中 f_α 都是属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的有界连续函数. 由命题 4.2, $\hat{T}(\xi)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}\xi^\alpha\hat{f}_\alpha$, 其中 $\hat{f}_\alpha$ 都是有界连续函数. 于是，$\hat{T}(\xi)$ 可以表示为多项式和有界连续函数的乘积. 证毕.

定理 6.4. 广义函数 T 属于 D'_{L^2} 当且仅当它的 Fourier 变换是多项式和 L^2 函数的乘积.

证明 若 $T\in D'_{L^2}$, 那么由定理 6.2, $T=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}D^\alpha f_\alpha$, 其中 $f_\alpha\in L^2(\mathbb{R}^n)$. 于是，由定理 4.5,

$$\hat{T}(\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\xi^\alpha\hat{f}_\alpha,$$

其中 $\hat{f}_\alpha\in L^2$. 因为函数

$$\hat{h}(\xi)=\frac{\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}\xi^\alpha \hat{f}_\alpha}{(1+|\xi|^2)^{m/2}}$$

属于 L^2，故得 $\hat{T}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{h}(\xi)$，这就获得所要的结果. 反过来的论断是平凡的. 证毕.

注 定理 6.4 也容易由定理 5.7 和 5.9 获得.

4. $S'(\mathbb{R}^n)$ 的结构

我们已经知道，一个在无限远处缓增的连续函数的导数是一个缓增广义函数. 现在我们将证明，反过来，每个缓增广义函数是一个在无限远处缓增的连续函数的导数. 先证明下面的引理.

引理 6.1. 若 T 是一个缓增广义函数，则存在数 $k>0$ 使得 $(1+r^2)^{-k/2}T\in D'_{L^1}$.

证明 若 $T\in S'$，可以找到 S 内 O 点的一个邻域

$$V(k,\ m,\ \varepsilon)=\{\phi\in S:|(1+r^2)^{k/2}\partial^p\phi(x)|\leqslant\varepsilon,\quad \forall|p|\leqslant m,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^n\}$$

使得 $|\langle T,\ \phi\rangle|\leqslant 1,\ \forall\phi\in V$.

我们要求存在 D_{L^1} 内 O 点的一个邻域 W，使得对所有 $\psi\in S\cap W$，$\phi=(1+r^2)^{-m/2}\psi\in V$. 事实上，设

$$W(m+n,\ \eta)=\left\{\psi\in D_{L^1}:\ \sup_{|\alpha|\leqslant m+n}\int\left|\frac{\partial^\alpha\phi}{\partial x^\alpha}(x)\right|dx\leqslant\eta\right\},$$

这里的 η 将在后面确定. 首先，注意到对每个 n 元数组 $s\in\mathbb{N}^n$ 有

$$|\partial^s(1+r^2)^{-k/2}|\leqslant C_{s,k}(1+r^2)^{-k/2}.$$

设 $p\in\mathbb{N}^n$，$|p|\leqslant m$. 由 Leibniz 公式，

$$\partial^p\phi=\sum_{s+q=p}\frac{p!}{s!\,q!}\partial^s[(1+r^2)^{-k/2}]\partial^q\psi;$$

于是
$$|\partial^p\phi|\leqslant C_{p,k}(1+r^2)^{-k/2}\sum_{q\leqslant p}|\partial^p\psi|.$$

另一方面，

$$\partial^q\psi(x)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\frac{\partial^n}{\partial t_1\cdots\partial t_n}\left[\frac{\partial^q\psi}{\partial t^q}(t)\right]dt_1\cdots dt_n,$$

又因为 $|q|+n\leqslant m+n$，便得到

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|\partial^q\psi(x)|\leqslant\left\|\frac{\partial^n}{\partial t_1\cdots\partial t_n}\left(\frac{\partial^q\psi}{\partial t^q}\right)\right\|_{L^1}\leqslant\eta.$$

作适当的代换，得

$$(1+r^2)^{k/2}|\partial^p\phi|\leqslant C'_{p,k}\cdot\eta.$$

选取 η，使得 $C'_{p,k}\cdot\eta\leqslant\varepsilon$，我们看到当 $\psi\in S\cap W$ 时 $\phi\in V$。

因此，对所有 $\psi\in T\cap W$ 有

$$|\langle(1+r^2)^{-k/2}T,\ \psi\rangle|=|\langle T,\ (1+r^2)^{-k/2}\psi\rangle|\leqslant 1,$$

这表明：因为 S 在 D_{L^1} 内稠密，所以 $(1+r^2)^{-k/2}T$ 是 D_{L^1} 上的一个连续线性泛函．证毕．

定理6.5. 广义函数 $T\in S'$ 当且仅当它能够表示为一个有限和

$$T=\sum\partial^\alpha f_\alpha, \tag{6.6}$$

其中 f_α 都是在无限远处缓增的连续函数．

证明 由引理 6.1，存在数 $k\geqslant 0$ 使得 $(1+r^2)^{-k/2}T\in D'_{L^1}$．再由定理 6.2，能够写出

$$(1+r^2)^{-k/2}T=\sum\partial^\gamma h_\gamma,\ h_\gamma\in L^\infty.$$

设
$$g_\gamma(x)=\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}h_\gamma(t)\,dt_1\cdots dt_n.$$

因为
$$|g_\gamma(x)|\leqslant|x_1|\cdots|x_n|\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|h_\gamma(x)|,$$

所以 g_γ 是在无限远处缓增的连续函数．作适当的代换，得

$$T=\sum(1+r^2)^{k/2}\partial^\beta g_\beta.$$

最后，注意到每一项 $(1+r^2)^{k/2}\partial^\beta g_\beta$ 都可以写为有限和

$$\sum\partial^\alpha(1+r^2)^{k_\alpha/2}g'_\alpha,$$

其中 g'_α 是一个有界连续函数，这样就证明了所需的结论．证毕．

因为出现在(6.6)中的函数 f_α 是一个在无限远处缓增的连续函数，所以它可以写为

$$f_\alpha=(1+r^2)^{k_\alpha/2}g_\alpha,$$

其中 g_α 是 $\mathbf{R}^n$ 内的有界连续函数．

另一方面，还可以把(6.6)化为一个单一的导数．事实上，设

$$T=(1+r^2)^{k/2}f+\partial_j[(1+r^2)^{l/2}f_j],$$

其中 f 和 f_j 都是有界连续函数. 令

$$g=\int_0^{x_j}(1+r^2)^{k/2}f\,dt_j,$$

$$h=\frac{g}{(1+r^2)^{k/2+1}}.$$

显然 $\partial_j g=(1+r^2)^{k/2}f$ 以及 h 是有界连续函数. 作适当的代换, 便得

$$T=\partial_j[(1+r^2)^{m/2}F],$$

其中 m 是一个适当的数, F 是有界连续函数. 利用归纳法, 由定理 6.5 可得下面的结果:

系　广义函数 T 属于 S' 当且仅当它能够表示为

$$T=\partial^\alpha[(1+r^2)^{k/2}f(x)],$$

其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界连续函数.

5. 在无限远处急降的广义函数空间 O'_c

在第 4 章第 8 节内我们曾经看到 S 的元素和 S' 的元素的卷积 (定理 4.9) 以及 E' 和 S' 的卷积 (定理 4.10). 在这两种情形下, 运算对每个变量是连续的并且 Fourier 变换算子将卷积映射为相应的 Fourier 变换的乘积. 这就自然地会问: 怎样的广义函数的空间是最一般的空间, 使得这一空间和 S' 之间的卷积在 S' 上连续, 并且 Fourier 变换算子将卷积映射为相应的 Fourier 变换的乘积. 按照 Schwartz[28, 第 VII 章, p. 100], 我们给出下列定义.

定义 6.3. 记 $O'_c(\mathbb{R}^n)$ 是由满足下列条件的所有广义函数 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$ 组成的空间: 对所有实数 k,

$$(1+r^2)^{k/2}T\in D'_{L^\infty}. \tag{6.7}$$

换句话说, $T\in O'_c$ 当且仅当对所有 k, $(1+r^2)^{k/2}T$ 是 L^∞ 中函数的导数的有限和(定理 6.2). 或者等价地, $T\in O'_c$ 当且仅当对所有多项式 $P(x)$ 有 $P(x)T\in D'_{L^\infty}$.

例 1. 每个有紧支柱的广义函数确定 O'_c 的一个元素.

2. O'_c 的每个元素确定一个缓增广义函数.

还可以用一种更为一致的方法来定义 O'_c，把它定义为广义函数的正则空间 O_c 的对偶. O_c 是由 $\mathbb{R}^n$ 上的所有 C^∞ 函数 ϕ 组成的空间并且这些 ϕ 满足：存在整数 k，使得对所有 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，$(1+r^2)^{k/2}\partial^\alpha\phi$ 在无限远处为 0. 在空间 O_c 上可以装备 Hausdorff 局部凸拓扑，使得它成为广义函数的正则空间，并且它的对偶是由所有满足定义 6.3 的条件的广义函数所组成. 在 O'_c 上我们可以定义它的强拓扑并且嵌入 $O'_c\to D'$ 是强连续的. 也有 $E'\subset O'_c$ 和 $O'_c\subset S'$ 具有连续的嵌入. 在这里我们不证明这些结果，读者可参考 Horvath [17]，在那里有较详细的叙述.

由定义 6.3 我们能够立即获得在 O'_c 内收敛于 0 的概念，即广义函数 $T_j\in O'_c$ 收敛于 0 当且仅当对所有的 k，广义函数 $(1+r^2)^{k/2}T_j$ 在 D'_{L^∞} 内收敛于 0. 我们要指出，这一概念对应着 O'_c 内的强收敛.

定理 6.6. 广义函数 $T\in O'_c$ 当且仅当对每个 $k>0$，存在一个整数 $m=m(k)$，使得

$$T=\sum_{|\alpha|\le m}\partial^\alpha f_\alpha, \tag{6.8}$$

其中 f_α 都是适合 $(1+r^2)^{k/2}f_\alpha\in L^\infty$ 的连续函数.

证明 若 $T\in O'_c$，那么由定义有

$$(1+r^2)^{k/2}T=\sum_\beta\partial^\beta g_\beta,$$

其中 g_β 是有界函数. 于是，

$$T=\sum_\beta(1+r^2)^{-k/2}\partial^\beta g_\beta,$$

由 Leibniz 公式能够写出

$$(1+r^2)^{-k/2}\partial^\beta g_\beta=\partial^\beta[(1+r^2)^{-k/2}g_\beta]-\sum_{0\le|t|<|\beta|}C_{s,t}\partial^s[(1+r^2)^{-k/2}]\partial^t g_\beta.$$

现在我们对 $|t|$ 用归纳法证明

$$\partial^s[(1+r^2)^{-k/2}]\partial^t g_\beta$$

是连续函数的导数的有限和，并且它与 $(1+r^2)^{k/2}$ 的乘积在 $\mathbb{R}^n$ 内

有界. 事实上，若 $t=0$，我们设

$$h=\partial^s[(1+r^2)^{-k/2}]g_\beta.$$

因为
$$|h|\leqslant C(1+r^2)^{-k/2}|g_\beta|,$$
这就得到 $(1+r^2)^{k/2}h\in L^\infty$. 设 $|t|=l$ 时结论成立. 令 $|t|=l+1$ 并写出

$$\partial^s[(1+r^2)^{-k/2}]\partial^t g_\beta=\partial_j\{\partial^s[(1+r^2)^{-k/2}]\partial^{t'}g_\beta\}$$
$$-\partial_j\partial^s[(1+r^2)^{-k/2}]\partial^{t'}g_\beta.$$

于是，左端是连续函数的导数之和，这些连续函数与 $(1+r^2)^{k/2}$ 的乘积属于 L^∞.

反过来，设广义函数 T 可以用(6.8)表示. 对每个 $\phi\in D_{L^1}$ 和每个 $|\alpha|\leqslant m$，我们得

$$\langle(1+r^2)^{k/2}\partial^\alpha f_\alpha,\ \phi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}f_\alpha\partial^\alpha[(1+r^2)^{k/2}\phi]dx.$$

因为 $\partial^\alpha[(1+r^2)^{k/2}\phi]$ 以和式 $(1+r^2)^{k/2}\sum\limits_{|l|\leqslant|\alpha|}\partial^l\phi$ 为界，其中 $\partial^l\phi\in L^1$，$(1+r^2)^{k/2}f_\alpha\in L^\infty$，我们得

$$|\langle(1+r^2)^{k/2}\partial^\alpha f_\alpha,\ \phi\rangle|\leqslant C\sum_{|l|\leqslant|\alpha|}\int|(1+r^2)^{k/2}f_\alpha\partial^l\phi|dx$$
$$\leqslant C\|(1+r^2)^{k/2}f_\alpha\|_{L^\infty}\sum_{|l|\leqslant|\alpha|}\|\partial^l\phi\|_{L^1},$$

于是 $(1+r^2)^{k/2}T\in D'_{L^\infty}$. 证毕.

容易得到定理 6.6 的下列推论.

系 1. 广义函数 T 属于 O'_c 当且仅当对每个 $k\geqslant0$，存在一个整数 $m=m(k)$ 使得

$$T=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\partial^\alpha f_\alpha,$$

其中 f_α 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数并且

$$\lim_{r\to+\infty}(1+r^2)^{k/2}|f_\alpha(x)|=0.$$

系 2. 若 $T\in O'_c$，则 $T\in D'_{L^1}$.

证明 如果在定理 6.6 内我们取 k 使得 $(1+r^2)^{-k/2}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 内可积，那么出现在(6.8)中的函数 f_α 属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$，这时系 2 就成为定理 6.2 的一个推论. 证毕.

因为 $D'_{L^p}\subset D'_{L^q}$, $\forall p\leqslant q$, 那么由系 2 知道: 若 $T\in O'_c$, 则 $T\in D'_{L^p}$, $\forall p$.

为了讨论空间 O'_c 与 S' 的卷积,我们首先证明下面的引理.

引理 6.2. 若 $S=\partial^\alpha[(1+r^2)^{k/2}f(x)]\in S'$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界连续函数,又若 $\phi\in S$, 则

$$F(x)=\langle S_y,\ \phi(x+y)\rangle$$

是$\mathbb{R}^n$上的一个C^∞函数并使得对所有$l>k+n$, $(1+|x|^2)^{-l/2}F(x)\in D_{L^1}$. 此外,若在 S 内 $\phi_j\to0$, 则在 D_{L^1} 内 $F_j\to0$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}F(x)&=\langle S_y,\ \phi(x+y)\rangle\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{k/2}f(y)\frac{\partial^\alpha\phi}{\partial y^\alpha}(x+y)dy;\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial^\beta F}{\partial x^\beta}=(-1)^{|\alpha|}\int(1+|y|^2)^{k/2}f(y)\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\beta\partial y^\alpha}\phi(x+y)dy.$$

因为 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界,由引理 5.2, 我们得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^\beta F}{\partial x^\beta}(x)\right|\\&\leqslant C(1+|x|^2)^{k/2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x+y|^2)^{k/2}\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\beta\partial y^\alpha}\phi(x+y)dy\\&=C(1+|x|^2)^{k/2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|u|^2)^{k/2}\partial^{\alpha+\beta}\phi(u)du\\&\leqslant C(1+|x|^2)^{k/2}\gamma_{m',k'}(\phi),\quad\forall\beta\in\mathbb{N}^n.\end{aligned}$$

其中 m' 和 k' 都是适当的整数, $\gamma_{m',k'}$ 是 S 的一个半范, 而 S 的拓扑正是由这些半范定义的. 若 $l>k+n$, 上述不等式表明

$$(1+|x|^2)^{-l/2}\left|\frac{\partial^\beta F}{\partial x^\beta}(x)\right|\leqslant C\cdot\gamma_{m',k'}\cdot(1+|x|^2)^{(k-l)/2};\quad(6.9)$$

于是(6.9)的左端对任何 $\beta\in\mathbb{N}^n$ 是可积的. 因此,

$$(1+|x|^2)^{-l/2}F(x)\in D_{L^1}.$$

引理的后一部分由(6.9)立即可得. 证毕.

假设我们已经给出了 $T\in O'_c$ 和 $S\in S'$. 由定理 6.5 的系, 能

够写出 $S=\partial^\alpha[(1+r^2)^{k/2}f(x)]$，其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界连续函数. 另一方面，由定义 6.3，$(1+|x|^2)^{l/2}T\in D'_{L^\infty}$，这里 $l>k+n$. 我们写出

$$\langle T_\xi,\ \langle S_\eta,\ \phi(\xi+\eta)\rangle\rangle$$
$$=\langle(1+|\xi|^2)^{l/2}T_\xi,\ (1+|\xi|^2)^{-l/2}F(\xi)\rangle. \qquad (6.10)$$

如果特别取 $T\in E'\subset O'_c$ 和 $\phi\in C_0\subset S$，那么立刻可以看出 (6.10) 的左端和 $\langle S*T,\ \phi\rangle$ 是一致的. 由引理 6.2，(6.10) 的右端对所有 $T\in O'_c$，$S\in S'$ 和 $\phi\in S$ 有意义，并且可以证明当 T、S 和 ϕ 中有两个保持有界时，(6.10) 的右端连续地依赖于另一个变量[28, 第 VII 章, p. 103]. 其严格的证明需要有关 O'_c 的强拓扑的性质，而在这里我们还未曾定义. 虽然如此，但我们能够利用这三个不同的空间内的收敛概念，来给出证明的想法. 事实上，若在 S 内 $\phi_j\to0$，那么由引理 6.2，在 D_{L^1} 内 $F_j\to0$；于是 (6.10) 的右端收敛于 0. 另一方面，若在 O'_c 内 $T_j\to0$，那么，由这一空间内收敛的定义，在 D'_{L^∞} 内 $(1+|\xi|^2)^{l/2}T_j\to0$，再由引理 6.2，(6.10) 的右端收敛于 0. 最后，若在 S' 内 $S_j\to0$，我们同样得到 (6.10) 收敛于 0. 这样一来，就给出了下列定理的证明概要.

定理 6.7. 若 $T\in O'_c$，$S\in S'$，那么由 (6.10) 定义的 $S*T$ 有意义并且属于 S'. 此外，映射

$$S'\times O'_c\ni(S,\ T)\to S*T\in S'$$

对每个变量连续.

我们已经知道，O_M 和 O'_c 都是 S' 的子空间；于是 Fourier 变换 F 有意义. 我们将看到 F 把这两个空间互换. 更确切地说，有下面的定理.

定理 6.8. Fourier 变换 F 是从 O_M 到 O'_c 上的一个一一映射. 同样，F 是从 O'_c 到 O_M 上的一个一一映射.

证明 因为 Fourier 逆变换 F^{-1} 有着和 F 相同的性质，所以只要证明 F 将 O_M 映射到 O'_c 内去以及将 O'_c 映射到 O_M 内去就可以了.

设 $\phi\in O_M$，又设 m 是一个整数使得 $m>n/2$. 由定义 4.9，对

每个整数 $k\geqslant 0$, 存在充分大的整数 l, 使得

$$|(1-\Delta)^k\phi(x)|\leqslant C(1+r^2)^{l-m},\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

令

$$h(x)=\frac{(1-\Delta)^k\phi(x)}{(1+r^2)^l},$$

由整数 m 的选取, h 显然是可积函数. 作 Fourier 变换得

$$(1+|\xi|^2)^k\hat{\phi}(\xi)=(1-\Delta_\xi)^l\hat{h}(\xi),$$

其右端是有界函数的导数的有限和. 因此, 对每个整数 $k\geqslant 0$, $(1+|\xi|^2)^k\hat{\phi}(\xi)\in D'_{L^\infty}$, 这就证明了 $\hat{\phi}\in O'_c$.

若 $T\in O'_c$, 由定义 6.3 和定理 6.6 的系 2 得到: 对所有 $\alpha\in\mathbb{N}^n$, 有 $x^\alpha T\in D'_L$. 再由定理 6.3, 得

$$\widehat{x^\alpha T}=D_\xi^\alpha\hat{T}(\xi)$$

是一个在无限远处缓增的连续函数, $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$. 于是, $\hat{T}\in O_M$. 证毕.

注 同样有, F 是从 O_M 到 O'_c 上以及从 O'_c 到 O_M 上的拓扑同构. (见 Schwartz[28, 第 VII 章, p. 125]).

作为上述定理的一个应用, 将证明下面的定理.

定理 6.9. 若 $T\in O'_c$ 和 $\alpha\in S$, 则 $T*\alpha\in S$.

证明 只要证明 Fourier 变换 $\widehat{T*\alpha}\in S$. 因为 $O'_c\subset S'$, 所以由定理 4.9, $T*\alpha\in O_M\subset S'$; 于是 $T*\alpha$ 有意义, 再由定理 4.11, $\widehat{T*\alpha}=\hat{T}\cdot\hat{\alpha}$. 但由定理 6.8, $\hat{T}\in O_M$, 以及由命题 4.3, $\hat{T}\cdot\hat{\alpha}\in S$. 证毕.

现在, 我们可以拓广定理 4.11 和 4.13 的结果.

定理 6.10. 若 $T\in O'_c$ 和 $S\in S'$, 那么

$$\widehat{S*T}=\hat{S}\cdot\hat{T}.\tag{6.11}$$

证明 由定理 6.5 的系能够写出

$$S=D^\alpha\Phi,$$

其中 Φ 是一个在无限远处缓增的连续函数. 对所有 $\phi\in S$, 注意到 (6.10), 有

$$\langle\widehat{S*T},\ \phi\rangle=\langle S*T,\ \hat{\phi}\rangle=\langle T_\xi,\ \langle S_\eta,\ \hat{\phi}(\xi+\eta)\rangle\rangle.$$

另一方面,

$$\langle S_\eta,\ \hat{\phi}(\xi+\eta)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}\Phi(\eta)D_\eta^\alpha\hat{\phi}(\xi+\eta)d\eta$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}\Phi(\eta-\xi)D_\eta^\alpha\hat{\phi}(\eta)d\eta$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n}\Phi(\eta-\xi)\widehat{y^\alpha\phi}(\eta)d\eta = (\check{\Phi}*\widehat{y^\alpha\phi})(\xi).$$

如同定理 4.11 的证明，容易验证

$$\check{\Phi} = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{\Phi}},$$

$$\Phi*\widehat{y^\alpha\phi} = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{\Phi}}*\widehat{y^\alpha\phi} = \widehat{\hat{\Phi}\cdot y^\alpha\phi}$$

(见第 4 章习题 18). 作适当的代换，因为 $\hat{T}\in O_M$, $\hat{S}\in S'$, 我们得

$$\langle S*T,\ \phi\rangle = \langle T_\xi,\ \langle S_\eta,\hat{\phi}(\xi+\eta)\rangle\rangle = \langle T_\xi,\ \Phi\cdot\widehat{y^\alpha\phi}(\xi)\rangle$$

$$= \langle\hat{T},\ \hat{\Phi}\cdot y^\alpha\phi\rangle = \langle\hat{T},\ \widehat{D_\eta^\alpha\Phi}\cdot\phi\rangle$$

$$= \langle\hat{T},\ \hat{S}\cdot\phi\rangle = \langle\hat{S}\cdot\hat{T},\ \phi\rangle.$$

证毕.

按照同样的方法，可以将第 4 章的性质 IV 拓广到广义函数上去，即有下面的定理.

定理 6.11. 若 $T\in O_M$ 和 $S\in S'$, 则

$$\widehat{S\cdot T} = (2\pi)^{-n}\hat{S}*\hat{T}. \tag{6.12}$$

习 题

1. 证明 D_{L^p} 的拓扑与下面的拓扑是一致的: 对所有 m, 嵌入 $D_{L^p}\to H^{m,p}$ 是连续的最弱拓扑.

2. 若 $1<p<+\infty$, 证明 D_{L^p} 是一个自反空间.

3. 在 $p=1$ 的情形下，完成定理 6.2 的证明.

4. 证明 $T\in O_c'$ 当且仅当对所有多项式 $P(x)$, $PT\in D_{L^\infty}'$.

5. 证明每个 O_c 的元素确定一个广义函数.

6. 证明定理 6.6 的系 1.

7. 证明: 若在 S 内 $\phi_j\to 0$, 则在 D_{L^1} 内 $F_j\to 0$, 从而完成引理 6.2 的证明.

8. 证明: 若 $T\in O_c'$, 则 $x^\alpha T\in D_{L^1}'$, $\forall\alpha\in\mathbf{N}^n$.

9. 证明: (i) 若 $h\in D_{L^\infty}$ 和 $\phi\in D_{L^1}$ 则 $h\phi\in D_{L^1}$; (ii) 若 $h\in D_{L^\infty}$ 和 $T\in D_{L^\infty}'$ 则 $hT\in D_{L^\infty}'$.

10. 若 $\phi\in D_{L^\infty}$ 和 $f\in H^s$, 其中 s 是一个整数，证明 $\phi f\in H^s$.

第 7 章

应　　用

1. 局部算子和伪局部算子

若 $P(x, D)=\sum_{|p|\leq m} a_p(x)D^p$ 是系数为 C^∞ 函数的一个偏微分算子，显然

$$\operatorname{supp} PT \subset \operatorname{supp} T, \ \forall T \in D'.$$

换句话说，偏微分算子将缩小广义函数的支柱．这一性质引导出下面的定义．

定义 7.1. 一个从 $C_c^\infty(\Omega)$ 到 $C^\infty(\Omega)$ 内的连续线性算子 L，如果它能够扩张为一个从 $E'(\Omega)$ 到 $D'(\Omega)$ 内的连续线性算子，并且使得

$$\operatorname{supp} LT \subset \operatorname{supp} T, \ \forall T \in E'(\Omega),$$

就称 L 是一个*局部算子*．

于是系数为 C^∞ 函数的每一个偏微分算子是局部算子．反之，Peetre[23, 24] 曾经证明每个局部型的算子是一个偏微分算子．

为了定义伪局部算子，我们要引进广义函数的奇异支柱的概念．

定义 7.2. 设 T 是一个广义函数．如果存在一个最大的开集使得 T 在这个开集内是一个 C^∞ 函数，就称这个最大开集的余集是 T 的*奇异支柱*，记为 sing supp T.

显然　　$\operatorname{sing\,supp} T \subset \operatorname{supp} T.$

这是因为在 T 的支柱的余集内，T 与等于 0 的函数是相同的．

例　1. $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内每个函数的奇异支柱是空集．

2. Dirac 测度 δ 的奇异支柱是原点．在这种情形下，奇异支柱和支柱是一致的．

3. 开区间(a, b)上的特征函数的支柱是闭区间$[a, b]$. 它的奇异支柱是集$\{a\}\cup\{b\}$.

定义 7.3. 一个从$C_c^\infty(\Omega)$到$C^\infty(\Omega)$内的连续线性算子L如果满足条件: (i) L能够扩张为一个从$E'(\Omega)$到$D'(\Omega)$内的连续线性算子; (ii) 对每个$T\in E'(\Omega)$有

$$\text{sing supp } LT\subset \text{sing supp } T.$$

就称L是一个伪局部算子.

例 1. 设$\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 由

$$M_\phi(\psi)=\phi\cdot\psi,\quad \forall\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

所定义的算子M_ϕ是伪局部的. 这一算子显然也是局部的.

2. 设$\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 则算子$L_\phi(\psi)=\phi*\psi$是伪局部的. 事实上, 由定理 3.2,

$$\text{sing supp}(\phi*T)=\emptyset,\ \forall T\in E'(\mathbb{R}^n).$$

下面的结果提供了伪局部算子的一个非平凡的例子(见Schwartz[29]).

定理 7.1. 设$E\in D'(\mathbb{R}^n)$, 又设E是$\mathbb{R}^n-\{0\}$($\mathbb{R}^n$中原点的余集)内的C^∞函数, 则由

$$L_E(\phi)=E*\phi,\ \forall\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

定义的算子L_E是伪局部的.

为了证明定理 7.1, 只要证明定义 7.2 的条件(ii)成立就可以了, 这是因为由第三章第 2 节的性质 2 知道, 这一卷积可以连续地扩张到$E'(\mathbb{R}^n)$. 为了证明定义 2.7 的条件(ii)成立, 我们取余集, 只要去证明: 若$T\in E'(\mathbb{R}^n)$并且它在某个开集$\Omega\subset\mathbb{R}^n$上是一个$C^\infty$函数, 则$E*T$在$\Omega$上也是$C^\infty$函数. 这一结果从广义函数正则化的有关结果(见第 3 章第 3 节)的一个拓广推得. 首先, 我们引进下列记号:

若Ω是$\mathbb{R}^n$的一个开集, $y\in\mathbb{R}^n$, 设

$$\Omega-y=\{x-y:x\in\Omega\}$$

是Ω关于y的平移. 显然, $\Omega-y$是一个开集.

若A是$\mathbb{R}^n$的任何子集, 设

$$\Omega - A = \bigcup_{y \in A} \Omega - y.$$

显然，$\Omega - A$ 是一个开集. 若 $A \subset B$，我们有 $\Omega - A \subset \Omega - B$.

对每个实数 $\varepsilon > 0$，设

$$\Omega^\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) > \varepsilon\},$$

其中 Ω^c 是 Ω 在 $\mathbb{R}^n$ 内的余集. 集 Ω^ε 也是一个开集并且 $\Omega = \Omega^\varepsilon + B_\varepsilon$，这里 B_ε 是以原点为中心以 ε 为半径的开球.

引理 7.1. 设 $T \in E'(\mathbb{R}^n)$，又设 K 是 T 的支柱，Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 内的一个开子集. 若广义函数 $E \in D'(\mathbb{R}^n)$ 在 $\Omega - K$ 上是 0（见定义 2.4），那么卷积 $E*T$ 在 Ω 上是 0.

证明 由假设，我们有

$$\operatorname{supp} T = K, \operatorname{supp} E \subset (\Omega - K)^c.$$

由第 3 章第 2 节的性质 1，

$$\operatorname{supp}(E*T) \subset \overline{K + (\Omega - K)^c}.$$

但对所有的 $x \in K$ 和所有的 $y \in (\Omega - K)^c$，必有 $x + y \in \Omega^c$，这表明

$$\overline{K + (\Omega - K)^c} \subset \Omega^c;$$

于是 $E*T$ 在 Ω 上为 0. 证毕.

系 在引理的假设之下，如果广义函数 E 在 $(\Omega - K)^\varepsilon$ 上是 0，那么卷积 $E*T$ 在 Ω^ε 上为 0.

证明 在引理 7.1 的证明中，已经得到下列结论：$K + (\Omega - K)^c \subset \Omega^c$. 另一方面，$(\Omega^\varepsilon)^c = \Omega^c + B_\varepsilon$；于是

$$K + (\Omega - K)^c + B_\varepsilon \subset \Omega^c + B_\varepsilon = (\Omega^\varepsilon)^c,$$

这表明
$$\overline{K + ((\Omega - K)^\varepsilon)^c} \subset (\Omega^\varepsilon)^c;$$

因此，$E*T$ 在 Ω^ε 上为 0. 证毕.

引理 7.2. 在引理 7.1 的假设下，若广义函数 E 在 $\Omega - K$ 上是 C^∞ 函数. 则，$E*T$ 在 Ω 上是 C^∞ 函数.

证明 因为可微是一个局部性质，所以可假定 Ω 是有界集. 现在设 β 是一个 C^∞ 函数，它在 $(\Omega - K)^\varepsilon$ 上等于 1，并有含在 $(\Omega - K)^{\varepsilon/2}$ 内的支柱. 令 $E_1 = \beta E$. 由假设得知 E_1 是一个 C^∞ 函数，并且在 $\mathbb{R}^n$ 内有紧支柱；于是卷积 $E*T$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的 C^∞ 函数.

另一方面，由函数β的选取知道，E_1和E在$(\Omega-K)^\varepsilon$上是相同的。于是，再由引理7.1的系，E_1*T和$E*T$在Ω^ε上是相同的，这就是说，$E*T$在Ω^ε上是C^∞函数．令$\varepsilon\to 0$，我们得到$E*T$在Ω上是C^∞函数．证毕．

定理7.1.的证明 如同上面已经指出的，只要去证明若$T\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$并且$T$是某个开集$\Omega\subset\mathbb{R}^n$上的$C^\infty$函数；那么卷积$E*T$在$\Omega$上也是$C^\infty$函数．设$\omega$是一个相对紧开集使得$\bar{\omega}\subset\Omega$，又设$\alpha\in C_c^\infty(\Omega)$，并在$\bar{\omega}$的某个邻域上$\alpha=1$．写出

$$E*T=E*\alpha T+E*(1-\alpha)T.$$

因为$\alpha T\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，这就得到$E*\alpha T\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$（定理3.2）．另一方面，若记$K$为$(1-\alpha)T$的支柱，那么，由函数$\alpha$的选取，我们有$\bar{\omega}\cap K=\phi$；于是$\omega-K\subset\mathbb{R}^n-\{0\}$．然而，由假设，$E$是$\mathbb{R}^n-\{0\}$上的$C^\infty$函数，当然也是$\omega-K$上的$C^\infty$函数；于是由引理7.2，$E*(1-\alpha)T$是$\omega$上的$C^\infty$函数．因此，$E*T$是$\omega$上的$C^\infty$函数，又因为$\omega$是$\Omega$的任何一个相对紧开子集，所以$E*T$是$\Omega$上的$C^\infty$函数．证毕．

2. 亚椭圆偏微分算子

由定理7.1给出的伪局部算子的例子是和偏微分算子的理论相联系的．

定义7.4. 设

$$P=P(x,\ D)=\sum_{|p|\le m}a_p(x)D^p$$

是Ω上的一个偏微分算子，其系数是C^∞函数．如果P满足下列条件：

(H)对Ω的每个开子集U以及Ω内的每个广义函数T，由$PT\in C^\infty(U)$可以得出$T\in C^\infty(U)$．

我们就说P是Ω内的亚椭圆偏微分算子．

换句话说，无论对怎样的$f\in C^\infty(U)$，方程$Pu=f$的所有解u是属于$C^\infty(U)$的．

现在，我们只讨论常系数偏微分算子. 由定义 7.3, 如果算子 P 是亚椭圆的并且有基本解 E(见定义 2.8)，那么 E 是 $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 上的 C^∞ 函数. 反之，有下列结论.

定理 7.2. 设 P 是常系数偏微分算子，又设它有一个基本解 E，并且 E 是 $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 上的 C^∞ 函数，则 P 在 $\mathbb{R}^n$ 内是亚椭圆的.

证明 我们来证明条件 (H) 成立. 设 $T\in D'(\mathbb{R}^n)$，又设广义函数 $S=PT$ 是某个开集 Ω 上的 C^∞ 函数. 令 $\alpha\in C_c^\infty(B_\varepsilon)$，这里 B_ε 是以原点为中心以 ε 为半径的球，并且在原点的一个邻域内 α 等于 1，再令 $F=\alpha E$. 由 Leibniz 法则，

$$PF=\sum_{|p|\leq m}a_pD^p(\alpha E)=\alpha PE+\sum_{|r|>0}a_pc_{rs}D^r\alpha\cdot D^sE=\delta+\beta,$$

其中 $\beta\in C_c^\infty(B_\varepsilon)$. 称广义函数 F 是 P 的一个拟基本解.

其次，有

$$T=\delta*T=PF*T-\beta*T=F*PT-\beta*T=F*S-\beta*T.$$

因为 $\beta\in C_c^\infty(B_\varepsilon)$，故卷积 $\beta*T$ 属于 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 设 $K=\operatorname{supp}F\subset B_\varepsilon$. 我们有 $\Omega^\varepsilon-K\subset\Omega^\varepsilon-B_\varepsilon\subset\Omega$. 由假设，$S$ 是 Ω 上的 C^∞ 函数，当然也是 $\Omega^\varepsilon-K$ 上的 C^∞ 函数；于是，由引理 7.2, $F*S$ 是 Ω^ε 上的 C^∞ 函数. 再令 $\varepsilon\to0$, 便得到 T 是 Ω 上的 C^∞ 函数. 证毕.

在下一节里，我们将要证明每一个常系数偏微分算子有一个基本解. 把它和定理 7.2 以及亚椭圆的定义联系起来，我们便得到亚椭圆偏微分算子的下列特征.

一个常系数偏微分算子是亚椭圆的当且仅当它有一个在 $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 上是 C^∞ 函数的基本解.

3. 基本解的存在性

在第 2 章第 5 节中，我们曾经利用几个简单的例子，给出了偏微分算子基本解的概念.

在偏微分方程的理论中，基本解是非常有用的工具，例如，在解非齐次方程时，或者在提供有关解的正则性和增长程度的信息

时. 此外, 如我们在上一节的最后已经注意到的, 某些偏微分算子可以用基本解的性质来刻划.

若 E 是 $P=P(D)$ 的一个基本解, 又若 f 是一个广义函数, 那么, 利用(3.13), 只要 $E*f$ 存在, 我们就看到非齐次方程

$$Pu=f$$

的一个解是 $u=E*f$.

古典的微分算子, 如 Laplace 算子, 热算子, 以及 Cauchy-Riemann 算子, 它们的基本解很久前我们已经知道. 关于每一个常系数偏微分算子都有基本解的猜测, 在 1954 年已由 Malgrang [21] (或者见[29]) 和 Ehrenpreis [8] 互相独立地证明了. 随后, 在文献上出现了几个其他的证明, 得到了有关基本解的更确切的信息. 读者可以参考 Hörmander [14] 和 Treves [31] 的书. 我们还必须提及 Hörmander 的文章[16], 在那里, 他解决了 Schwartz 提出的除法问题的猜测, 从而证明每个常系数偏微分算子存在缓增的基本解.

在重复 Malgrange 的最初的证明之前, 我们将给出基本解的一些古典例子. 并提出构造齐次椭圆算子基本解的一个方法.

Laplace 算子

设
$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

是空间 $\mathbb{R}^2$ 内的 Laplace 算子. 若 $n>2$, 则广义函数

$$E=\frac{\Gamma(n/2)}{(2-n)2\pi^{n/2}}\,r^{2-n}$$

是 Δ 的一个基本解. 若 $n=2$, 则广义函数

$$E=\frac{1}{2\pi}\log r$$

是 Δ 的一个基本解.

现在证明 $n>2$ 的情形. 对所有 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 我们有

$$\langle\Delta(r^{2-n}),\ \phi\rangle=\langle r^{2-n},\ \Delta\phi\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r>\varepsilon}r^{2-n}\Delta\phi\,dx.$$

利用 Green 公式[1]，并注意到当 $r\geqslant\varepsilon$ 时 $\Delta(r^{2-n})=0$，得

$$\langle\Delta(r^{2-n}),\ \phi\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\int_{r=\varepsilon}\frac{d}{dr}(r^{2-n})\phi\,d\omega_\varepsilon-\int_{r=\varepsilon}r^{2-n}\frac{d\phi}{dr}\,d\omega_\varepsilon\right\},$$

其中 $d\omega_\varepsilon$ 是以原点为中心以 ε 为半径的球面上的面积元素. 因为在靠近原点处 $\dfrac{d\phi}{dr}$ 是有界的，而半径为 ε 的球面积等于 $A\cdot\varepsilon^{n-1}$，其中 A 是单位球的面积，于是上式最后的积分是有界的，它是一个常数乘 ε，因此当 $\varepsilon\to0$ 时它趋于 0. 另一方面，第一个积分可以写为

$$\int_{r=\varepsilon}\frac{d}{dr}(r^{2-n})\phi d\omega_\varepsilon=(2-n)\int_{r=\varepsilon}\varepsilon^{1-n}\phi\,d\omega_\varepsilon=(2-n)\int_{r=\varepsilon}\phi\,d\omega,$$

其中 $d\omega$ 是单位球面的面积元素. 当 $\varepsilon\to0$ 时，上述积分收敛于 $A\cdot\phi(0)$，其中

$$A=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

是单位球面的面积. 作适当的代换，可得

$$\langle\Delta(r^{2-n}),\ \phi\rangle=\frac{(2-n)2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\phi(0),\ \forall\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n);$$

于是 E 是 Δ 的一个基本解.

Cauchy–Riemann 算子.

设 $z=x+iy$ 是一个复变数，并设

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

是 Cauchy–Riemann 算子. 能够证明

$$E=\frac{1}{\pi z}$$

是 Cauchy–Riemann算子的一个基本解[31, p.242].

热算子.

在 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 里，记 $(x,\ t)=(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ t)$ 是其

---

(1) $\int_V(u\cdot\Delta v-\Delta u\cdot v)dV=\int_S[u(\partial v/\partial\eta)-v(\partial u/\partial\eta)]dS$，这里 V 是一个体积，S 是它的边界，η 是内法向，dV 是体积元素，dS 是面积元素.

中的一个变元，这里$x=(x_1, \cdots, x_n)$是空间变量，t是时间变量。偏微分算子

$$H=\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$$

称为热算子，其中Δ是关于空间变量的 Laplace 算子。广义函数

$$E(x, t)=\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right]^n Y(t)\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

是H的一个基本解。[31, p. 245]。

椭圆算子

Laplace 算子是椭圆偏微分算子的一个经典的例子，椭圆算子的定义如下。设

$$P=P(D)=\sum_{|p|\leq m} a_p D^p$$

是一个阶为m的常系数偏微分算子。我们称m阶齐次多项式

$$P_m(\xi)=\sum_{|p|=m} a_p \xi^p$$

是$P(D)$的特征多项式。

定义7.4. 如果偏微分算子$P(D)$满足下列条件：

(E) $P_m(\xi)\neq 0$, $\forall \xi\in\mathbb{R}^n$ 并且 $\xi\neq 0$,

就称$P(D)$是椭圆的。

容易看出上述条件等价于下列的(E')。

(E') 存在常数$C_0>0$(椭圆常数)使得

$$|P_m(\xi)|\geq C_0|\xi|^m, \ \forall \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Laplace 算子Δ, Laplace 算子的幂Δ^m, Cauchy–Riemann 算子$\partial/\partial\bar{z}$. 都是椭圆算子的例子。

从形式上说，构造出偏微分算子$P=P(D)$的基本解是很容易的。事实上，假设有

$$P(D)E=\delta.$$

作 Fourier 变换得

$$P(\xi)\cdot\hat{E}=1;$$

于是

$$\hat{E}=\frac{1}{P(\xi)},$$

E 可以由 $1/P(\xi)$ 的 Fourier 逆变换给出. 然而，由于多项式 $P(\xi)$ 有实零点，这就带来了困难. 但这个困难是能够克服的，例如，在 $\mathbb{C}^n$ 中选取一个积分区域，使它避开 $P(\xi)$ 的零点. 在这里我们将不讨论这一方法，读者可以参考 Hörmander [14] 和 Treves[31] 的书.

设 $P=P_m$ 是一个 m 阶的常系数齐次椭圆偏微分算子. 为了构造出它的基本解，我们将证明 m 阶齐次函数

$$U(\xi)=\frac{1}{P_m(\xi)}$$

确定一个缓增广义函数，而它的 Fourier 逆变换就是算子 P 的一个基本解.

定义 7.6. 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个函数 $U(x)$，如果对某个复数 λ，有

$$U(tx)=t^\lambda U(x),\ \forall t>0,$$

就称 $U(x)$ 是 λ 阶齐次的.

我们总可以写出 $U(x)=r^\lambda f(\omega)$，其中 $r=|x|$，$\omega=(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_n)\in\Sigma$，$\Sigma$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的单位球面. 为简单起见，现在我们只考虑 λ 为整数的情形. 至于一般的情形，读者可以阅读参考文献[9, 28]. 我们还要假定除去原点 U 是 C^∞ 函数. 于是，设

$$U(x)=r^{-m}f(\omega), \tag{7.1}$$

其中 $m\gtrless 0$，是一个整数，f 在 Σ 上是一个 C^∞ 函数. 我们断言函数 U 确定 $\mathbb{R}^n$ 上一个缓增广义函数. 为了证明这一点，考虑两种情形，即 $m<n$ 和 $m\geqslant n$.

设 $m<n$. 对每个 $\phi\in S(\mathbb{R}^n)$，定义

$$u_\phi(r)=\int_\Sigma f(\omega)\phi(r\omega)d\omega. \tag{7.2}$$

容易看出，对每个 $\phi\in S(\mathbb{R}^n)$，$u_\phi(r)\in S(\mathbb{R})$. 再定义

$$\langle U,\ \phi\rangle=\int_0^\infty r^{-m+n-1}u_\phi(r)dr,\ \forall\phi\in S(\mathbb{R}^n). \tag{7.3}$$

因为 $\phi\in S$ 和 $m<n$，所以积分(7.3)绝对收敛. 同样，(7.3)还连续地依赖于 $\phi\in S$；因此，U 确定一个缓增广义函数.

设 $m\geqslant n$. 在这一情形下积分 (7.3) 将无意义. 为了确定 U 是一个缓增广义函数，我们将利用发散积分的有限部分的概念.

首先，若 $m=n$，考察积分

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} r^{-1}u_{\phi}(r)dr=\int_{\varepsilon}^{1} r^{-1}u_{\phi}(r)dr+\int_{1}^{\infty} r^{-1}u_{\phi}(r)dr. \qquad (7.4)$$

(7.4)右端的第二个积分是收敛的. 第一个积分可以写为

$$\int_{\varepsilon}^{1} r^{-1}u_{\phi}(r)dr=\int_{\varepsilon}^{1} r^{-1}(u_{\phi}(r)-u_{\phi}(0))\,dr+\int_{\varepsilon}^{1}u_{\phi}(0)\cdot r^{-1}dr$$

$$=\int_{\varepsilon}^{1} r^{-1}(u_{\phi}(r)-u_{\phi}(0))dr-u_{\phi}(0)\cdot\ln\varepsilon.$$

代入(7.4)，得

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} r^{-1}u_{\phi}(r)dr=\int_{\varepsilon}^{1}r^{-1}(u_{\phi}(r)-u_{\phi}(0))dr$$

$$+\int_{1}^{\infty}r^{-1}u_{\phi}(r)dr-u_{\phi}(0)\cdot\ln\varepsilon. \qquad (7.5)$$

记

$$F(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{1}r^{-1}(u_{\phi}(r)-u_{\phi}(0))dr+\int_{1}^{\infty}r^{-1}u_{\phi}(r)dr,$$

$$I(\varepsilon)=-u_{\phi}(0)\cdot\ln\varepsilon,$$

我们看到积分 (7.5) 分解为两部分：$F(\varepsilon)$，当 $\varepsilon\to0$ 时它有有限的极限；$I(\varepsilon)$，当 $\varepsilon\to0$ 时它趋于无限. 按定义，我们称 $\varepsilon\to0$ 时 $F(\varepsilon)$ 的极限是积分 (7.3) 的有限部分，其中 $m=n$. 记

$$\mathrm{FP}\int_{0}^{\infty}r^{-1}u_{\phi}(r)\,dr=\int_{0}^{1}r^{-1}(u_{\phi}(r)-u_{\phi}(0))\,dr+\int_{1}^{\infty}r^{-1}u_{\phi}(r)dr. \qquad (7.6)$$

按照同样的方法，可以证明当 $m>n$ 时积分 (7.3) 的有限部分等于

$$\mathrm{FP}\int_{0}^{\infty}r^{-m+n-1}u_{\phi}(r)dr$$

$$=\int_{0}^{1} r^{-m+n-1}\left\{u_{\phi}(r)-\sum_{s=0}^{m-n}\frac{1}{s!}\,\frac{\partial^{s}u_{\phi}(0)}{\partial r^{s}}\,r^{s}\right\}dr$$

$$+\int_{0}^{\infty}r^{-m+n-1}\left\{u_{\phi}(r)-\sum_{s=0}^{m-n-1}\frac{1}{s!}\,\frac{\partial^{s}u_{\phi}(0)}{\partial r^{s}}\,r^{s}\right\}dr. \qquad (7.7)$$

显然，当 $m<n$ 时，(7.3)的有限部分同该积分的值是相同的.

我们注意到，若在 $S(\mathbb{R}^n)$ 内 $\phi_j\to 0$，那么在 $S(\mathbb{R})$ 内 $u_{\phi_j}\to 0$，于是(7.6)和(7.7)的右端趋于 0. 总结上面的结果，我们能够说，若 $U(x)$ 是一个 m 阶齐次函数，并且在原点外是 C^∞ 的，那么它确定一个缓增广义函数 U：

$$\langle U, \phi\rangle = \mathrm{FP}\int_0^\infty r^{-m+n-1}u_\phi(r)\,dr,\ \forall\phi\in S, \tag{7.8}$$

当 $m<n$ 时，记号 FP 是不必要的.

因为 $U\in S'$，它的 Fourier 变换 $\hat{U}$ 是有意义的，并且仍旧属于 S'，还具有下列齐次性质：(i) 若 $m<n$，$\hat{U}$ 是在原点外的 C^∞ 函数，并且是 $m-n$ 阶齐次的；(ii) 若 $m\geqslant n$，$\hat{U}$ 可以分解为

$$\hat{U}=H+P\cdot\ln|x|$$

其中 H 是 $m-n$ 阶齐次函数，并且在原点外是 C^∞ 的，P 是 $m-n$ 阶齐次多项式. 这一结果的证明，读者可以参考文献[1].

概括起来，若

$$P(D)=\sum_{|p|=m}a_pD^p$$

是一个常系数的 m 阶齐次椭圆算子，那么 $P(D)$ 有一个缓增基本解 E 使得：(i) 若 $m<n$，E 是 $m-n$ 阶齐次函数，并且在原点外是 C^∞ 的；(ii) 若 $m\geqslant n$，$E=H(x)+P(x)\cdot\ln|x|$，其中 H 是一个 $m-n$ 阶齐次函数，并且在原点外是 C^∞ 的，P 是一个 $m-n$ 阶齐次多项式.

现在，我们证明基本解存在性的 Malgrange 定理.

定理 7.3. $\mathbb{R}^n$ 上的每一个常系数偏微分算子都有一个基本解 E 属于 $D'^{(n+1)}(\mathbb{R}^n)$，后者是 $n+1$ 阶广义函数的空间.

这一定理的证明基于下列两个引理.

引理 7.3. 设 $f(z)$ 是单位圆 $\{z\in\mathbb{C}: |z|\leqslant 1\}$ 上的单复变解析函数，$P(z)$ 是一个多项式，其首项系数是 a. 那么，下列不等式成立：

$$|af(0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})P(e^{i\theta})|\,d\theta. \tag{7.9}$$

证明 设 m 是 $P(z)$ 的阶，记

$$P(z)=az^m+bz^{m-1}+\cdots.$$

设
$$\bar{P}(z)=\bar{a}z^m+\bar{b}z^{m-1}+\cdots$$

它是将 P 的系数取共轭后得到的一个多项式. 如果令

$$\bar{q}(z)=z^m\bar{P}\left(\frac{1}{z}\right),$$

那么容易看出

$$\bar{q}(0)=\bar{a},\ |P(e^{i\theta})|=|\bar{q}(e^{i\theta})|.$$

由 Cauchy 公式,有

$$f(0)\bar{q}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)\bar{q}(z)}{z}dz,$$

这就获得(7.9). 证毕.

引理7.4. 设$f(z)$是$\mathbb{C}$内的整函数, $P(z)$是一个多项式, 其首项系数为 a. 那么对所有 $z_0\in\mathbb{C}$, 有不等式

$$|af(z_0)|\leqslant\sup_{|z-z_0|<1}|f(z)P(z)|. \qquad (7.10)$$

证明 对$f(z_0+z)$和$P(z_0+z)$运用引理7.3, 得

$$|af(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+e^{i\theta})P(z_0+e^{i\theta})|d\theta,$$

这就得出(7.10). 证毕.

定理7.3.的证明 1. 设$P=P(D)=\sum\limits_{|p|\leqslant m}a_pD^p$是常系数偏微分算子,并设

$${}^tP={}^tP(D)=\sum_{|p|\leqslant m}(-1)^{|p|}a_pD^p$$

是 P 的转置算子,定义为

$$\langle PT,\phi\rangle=\langle T,{}^tP\phi\rangle,\ T\in D',\ \forall\phi\in C_c^\infty. \qquad (7.11)$$

设 E 是 P 的基本解.在(7.11)内,用 E 代替 T 并注意到$PE=\delta$,得

$$\langle E,{}^tP\phi\rangle=\phi(0),\ \forall\phi\in C_c^\infty. \qquad (7.12)$$

设${}^tPC_c^\infty$是C_c^∞在${}^tP$作用下的象. 显然${}^tPC_c^\infty\subset C_c^\infty$. 另一方面, 若$\psi\in{}^tPC_c^\infty$, 必存在唯一的 $\phi\in C_c^\infty$ 使得$\psi={}^tP\phi$. 这是因为, 若对某个 $\phi\in C_c^\infty$, ${}^tP\phi=0$, 取 Fourier 变换得

$${}^tP(\xi)\cdot\hat{\phi}(\xi)=0,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,$$

因为${}^tP(\xi)$是多项式,这就得到$\hat{\phi}$恒为零.

因此，若 E 是基本解，线性泛函

$$E:\psi\in {}^tPC_c^\infty\to\langle E,\ \psi\rangle=\phi(0),\ \text{其中}\ {}^tP\phi=\psi,$$

在 ${}^tPC_c^\infty$ 上有定义，并且它是连续的，其中 ${}^tPC_c^\infty$ 上的拓扑是由 C_c^∞ 的自然拓扑导出的.

反过来，如果我们能够证明上述线性泛函在 ${}^tPC_c^\infty$ 上连续，而 ${}^tPC_c^\infty$ 上装备着由 C_c^k(对某个 k)导出的拓扑，那么由Hahn-Banach定理，可以把它扩张成为整个空间 C_c^k 上的一个连续线性泛函. 于是，$E\in D'^k$ 并且由(7.12)得 $PE=\delta$，即，E 是 P 的基本解.

2. 这样一来，为了证明定理，只要证明存在充分大的某个整数 k，使得线性泛函

$$\psi\in {}^tPC_c^\infty\to\phi(0)\in\mathbb{C},\ \text{这里}\ {}^tP\phi=\psi,$$

关于 C_c^k 的拓扑是连续的.

利用变数变换，如必要的话，我们能够假定算子 ${}^tP(D)$ 可写为

$${}^tP(D)=D_n^m+\sum_{h=1}^{m}P_h(D_1,\ \cdots,\ D_{n-1})D_n^{m-h},$$

其中 P_h 是 $D_1,\ \cdots,\ D_{n-1}$ 上的偏微分算子. 为简单起见，我们利用下列记号. 空间 $\mathbb{R}^n$ 的元素记为 $x=(x',\ t)$，$x'=(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})$，$t=x_n$. 空间 $\mathbb{C}^n$ 的元素记为 $\zeta=(\zeta',\ \tau)$，$\zeta'=(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_{n-1})$，$\zeta_j=\xi_j+i\eta_j$，$1\leqslant j\leqslant n-1$，$\tau=\mu+i\sigma$. 利用这些记号，我们能够写出

$${}^tP(D)=D_t^m+\sum_{h=1}^{m}P_h(D_{x'})D_t^{m-h}.$$

若 $\phi\in C_c^\infty$，设 $\hat\phi(\zeta)$ 是它的 Fourier-Laplace 变换. 由 Paley-Wiener 定理(定理 4.12)，$\hat\phi(\zeta)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数，并且 $\hat\phi(\zeta)\in S(\mathbb{R}^n)$. 再利用 Fourier 逆变换公式(4.5)，容易得到不等式

$$|\phi(0)|\leqslant(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat\phi(\xi',\ \mu)|d\xi'd\mu. \qquad (7.13)$$

我们估计上述积分如下：

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\hat\phi(\xi',\mu)|d\xi'd\mu$$

$$\leqslant A\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\xi'\,d\mu}{1+|\xi_1|^{n+1}+\cdots+|\xi_{n-1}|^{n+1}+|\mu|^{n+1}},$$

其中　　$A=\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|(1+|\xi_1|^{n+1}+\cdots+|\xi_{n-1}|^{n+1}+|\mu|^{n+1})\hat{\phi}(\xi)|.$

令　　$$M=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\xi'\,d\mu}{1+|\xi_1|^{n+1}+\cdots+|\xi_{n-1}|^{n+1}+|\mu|^{n+1}},$$

得　　$$|\phi(0)|\leqslant A\cdot M. \tag{7.14}$$

3. 为了估计 M, 我们把引理 7.4 应用到复变数 $\tau=\mu+i\sigma$ 的下列整函数上:

$\hat{\phi}(\xi',\tau)$, $\xi_j^{n+1}\hat{\phi}(\xi',\tau)$, $1\leqslant j\leqslant n-1$, 以及 $\tau^{n+1}\hat{\phi}(\xi',\tau)$

还有多项式 ${}^tP(\xi',\tau)$, 在点 μ. (这里, 假定 ξ' 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 内的一个固定元素.) 我们得到下面的不等式:

$$|\hat{\phi}(\xi',\mu)|\leqslant\sup_{|\tau-\mu|\leqslant 1}|{}^tP(\xi',\tau)\hat{\phi}(\xi',\tau)|, \tag{7.15}$$

$$|\xi_j^{n+1}\hat{\phi}(\xi',\mu)|\leqslant\sup_{|\tau-\mu|\leqslant 1}|\xi_j^{n+1}\,{}^tP(\xi',\tau)\hat{\phi}(\xi',\tau)|,\ 1\leqslant j\leqslant n-1, \tag{7.16}$$

$$|\mu^{n+1}\hat{\phi}(\xi',\mu)|\leqslant\sup_{|\tau-\mu|\leqslant 1}|\tau^{n+1}\,{}^tP(\xi',\tau)\hat{\phi}(\xi',\tau)|. \tag{7.17}$$

另一方面,

$${}^tP(\xi',\tau)\hat{\phi}(\xi',\tau)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}[\exp(-i(\langle x',\xi'\rangle+t\tau))]({}^tP(D)\phi)(x',t)\,dx'\,dt;$$

于是, 得到不等式

$$\sup_{|\tau-\mu|\leqslant 1}|{}^tP(\xi',\tau)\hat{\phi}(\xi',\tau)|$$
$$\leqslant\sup_{|\sigma|\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}^n}e^{|t\sigma|}|({}^tP(D)\phi)(x',t)|\,dx'\,dt. \tag{7.18}$$

相仿地, 可以写出

$$\xi_j^{n+1}\,{}^tP(\xi',\tau)\hat{\phi}(\xi',\tau)=\int_{\mathbb{R}^n}[\exp(-i(\langle x',\xi'\rangle+t\tau))]$$
$$\times(D_j^{n+1}\,{}^tP(D)\phi)(x',t)\,dx'\,dt,\ \ 1\leqslant j\leqslant n-1.$$

和　$$\tau^{n+1}\,{}^tP(\xi',\tau)\hat{\phi}(\xi',\tau)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}[\exp(-i(\langle x',\xi'\rangle+t\tau))](D_t^{n+1}\,{}^tP(D)\phi)(x',t)\,dx'\,dt.$$

并且获得不等式

$$\sup_{|\tau-\mu|\leqslant 1}|\xi_j^{n+1}\,{}^tP(\xi',\tau)\hat{\phi}(\xi',\tau)|$$

$$\leqslant \sup_{|\sigma|\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{|t\sigma|}|(D_j^{n+1\,t}P(D)\phi)(x',\ t)|dx'dt, \qquad (7.19)$$

$1\leqslant j\leqslant n-1$，和

$$\sup_{|\tau-\mu|\leqslant 1}|\tau^{n+1\,t}P(\xi',\ \tau)\hat{\phi}(\xi',\ \tau)|$$

$$\leqslant \sup_{|\sigma|\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{|t\sigma|}|(D_t^{n+1\,t}P(D)\phi)(x',\ t)|dx'dt \qquad (7.20)$$

综合不等式(7.15)～(7.20)，可得到

$$A\leqslant \sup_{|\sigma|\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{|t\sigma|}\left\{|{}^tP\phi|+\sum_{j=1}^{n-1}|D_j^{n+1\,t}P\phi|+|D_t^{n+1\,t}P\phi|\right\}dx'dt,$$

于是，由(7.14)，我们得

$$|\phi(0)|$$

$$\leqslant M\sup_{|\sigma|\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{|t\sigma|}\left\{|{}^tP\phi|+\sum_{j=1}^{n-1}|D_j^{n+1\,t}P\phi|+|D_t^{n+1\,t}P\phi|\right\}dx'dt. \qquad (7.21)$$

4．现在，考察 ${}^tPC_c^\infty$ 上的拓扑是由 C_c^{n+1} 上的拓扑导出的．若在 C_c^{n+1} 内 ${}^tP\phi_j\to 0$，这意味着所有 ${}^tP\phi_j$ 的支柱都含在 $\mathbb{R}^n$ 的一个固定的紧集内，并且 ${}^tP\phi_j$ 的直到 $n+1$ 阶的所有导数都一致收敛于 0．于是，(7.21)的右端收敛于 0，这意味着 $\phi_j(0)\to 0$．确切地说，这证明了线性泛函

$$\psi\in {}^tPC_c^\infty\to\phi(0)\in\mathbb{C},\quad 其中\ {}^tP\phi=\psi,$$

在 ${}^tPC_c^\infty$ 上连续，而 ${}^tPC_c^\infty$ 上装备着由 C_c^{n+1} 导出的拓扑．证毕．

习　　题

1．证明若 $n=2$，则 $E=\frac{\alpha}{2}\ln r$ 是 Δ 的一个基本解．

2．证明椭圆型条件(E)和(E′)是等价的．

3．设 $\phi\in S(\mathbb{R}^n)$，$u_\phi(r)$ 是由(7.2)定义的．证明：(i) $u_\phi(r)\in S(\mathbb{R}^n)$，$\forall\phi\in S(\mathbb{R}^n)$；(ii) 映射 $\phi\in S(\mathbb{R}^n)\to u_\phi(r)\in S(\mathbb{R})$ 是连续的．

4．证明公式(7.7)．

5．求由(7.8)定义的广义函数 U 的 Fourier 变换．

6．若 $P=P(D)$ 是常系数偏微分算子（其系数不全为 0），证明：使得 $PT=0$ 并且 $T\in E'$ 的这个 T 只能是恒为 0 的广义函数．（提示：利用 Paley-Wiener-Schwartz 定理．）

文　　献

[1] Barros-Neto, J., "Kernels associated to general elliptic problems," *J. Funct. Anal.*, **3**(2), 1973- -1992(1969).

[2] Bochner, S., and K. Chandrasekharn, "Fourier transforms," *Annals Math. Studies*, No. 19, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.

[3] Bochner, S., and W. T. Martin, *Functions of Several Complex Variables*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1948.

[4] Bourbaki, N., *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1953—1961.

[5] Bourbaki, N., *Integration*, Hermann, Paris, 1952, 1956, 1959, 1963.

[6] Bourbaki, N., *Espaces Vectoriels Topologiques*, 2 Vols., Hermann, Paris, 1953, 1955.

[7] Buck, R. C., *Advanced Calculus*, 2nd ed., Mcgraw-Hill, New York, 1965.

[8] Ehrenpreis, L., "Solutions of some problems of division, I," *Am. J. Math.* **76** 883—903(1954).

[9] Gelfand, I. M., and G. E. Shilov, *Generalized Functions*, Vols. 1, 2, 3, Academic Press, New York. (第一卷有中译本: «广义函数» I, 科学出版社, 1965)

[10] Gelfand, I. M., and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions*, Vol. 4, Acad-emic Press, New York. (有中译本: «广义函数» IV, 科学出版社, 1965)

[11] Gelfand, I. M., M. I. Graev, and N. Ya Vilenkin, *Generalized Functions*, Vol. 5, Academic Press, New York.

[12] Grothendieck, A., *Espaces Vectoriels Topologiques*, 2nd ed., Sociedade de Mathmatica de S. Paulo, S. Paulo, 1958.

[13] Grothendieck, A., "Sur certains espaces de fonctions holomorphes I," *J. reine angew, math.*, **192**(1), 35—64(1953).

[14] Hörmander, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[15] Hörmann, L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Complex Variables*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1966.

[16] Hörmander, L., "On the division of distributions by polynomials," *Ark. Mat.*, **3**; 555—568(1958).

[17] Horvath, J., *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[18] Kelley, John L., *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1955.

[19] Kothe, G., *Topologische Lineare Raume*, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

[20] Lions, J. L., *Problemes aux Limites dans les Equations aux Dérivées Partielles*, 2nd ed., Les Presses de L'Université de Montréal, 1965.

[21] Malgrange, B., "Existence et approximation des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution," ***Ann. Inst. Fourier, Grenoble,*** **6**, 271—355 (1955 – 1956).

[22] Nachbin, L., *Lectures on The Theory of Distributions,* Instituto de Fisica e Matemática, Universidade do Recife, Pe., Brazil, 1964.

[23] Peetre, J., "Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels," *Math. Scand.* **7**, 211—218 (1959).

[24] Peetre, J., "Rectification à l'article 'Une Caractérisation abstraite des opérateurs différentiels'," ***Math. Scand.*** **8**, 116—120 (1960).

[25] Royden, H. L., *Real Analysis,* 2nd ed., Macmillan, New York, 1968.

[26] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis,* 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1964.

[27] Rudin, W., *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1966.

[28] Schwartz, L., *Théorie des Distributions,* I, II, 2nd ed., Hermann, Paris, 1957.

[29] Schwartz, L., *Seminaire* 1954/55, *Équations aux Dérivées Partielles,* Faculté des Sciences de Paris, Sécretariat Mathématique, 1955.

[30] Schwartz, L., *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques,* Hermann, Paris, 1961.

[31] Treves, J. F., *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients,* Gordon and Breach, New York, 1966.

[32] Treves, J. F., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels,* Academic Press, New York, 1967.

[33] Zygmund, A., *Trigonometrical Series,* I. II. Cambridge University Press, New York, 1959.

索　引

三　划

五　划

六　划

七　划

八 划

九 划

十 划

十 一 划

十 二 划 以 上